M557 - ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1

Un filo metallico di lunghezza λ viene utilizzato per delimitare il perimetro di un'aiuola rettangolare.

a) Quale è l'aiuola di area massima che è possibile delimitare?

Si pensa di tagliare il filo in due parti e di utilizzarle per delimitare un'aiuola quadrata e un'altra circolare. Come si dovrebbe tagliare il filo affinché:

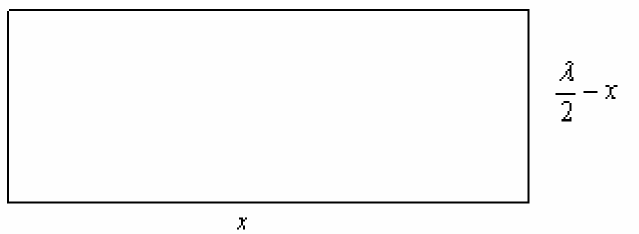
b) la somma delle due aree sia minima?

c) la somma delle due aree sia massima?

Una aiuola, una volta realizzata, ha la forma di parallelepipedo rettangolo; una scatola, cioè, colma di terreno. Si discute di aumentare del 10% ciascuna sua dimensione. Di quanto terreno in più, in termini percentuali, si ha bisogno?

SOLUZIONE DI DE ROSA NICOLA

a)



L'area è:

$$A(x)=x*\left(\frac{\lambda}{2}-x\right)=\frac{\lambda x}{2}-x^2,\ 0\le x\le\frac{\lambda}{2}$$

Calcoliamo la derivata prima e seconda :

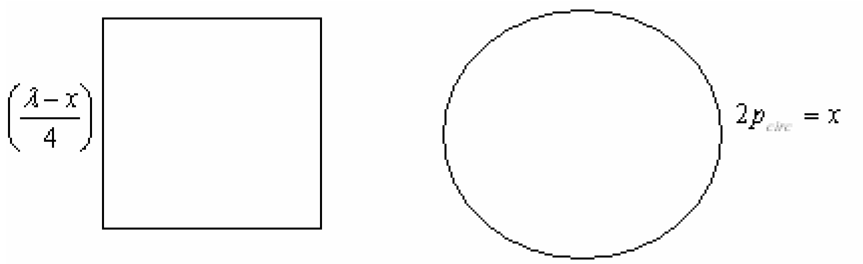
$$A^I(x)=\frac{\lambda}{2}-2x>0\to x<\frac{\lambda}{4}$$

$$A^{II}(x)=-2<0\forall x\to x=\frac{\lambda}{4}\text{ è l'ascissa del massimo, per cui}$$

$$\mathrm{A}_{\max}=\mathrm{A}(x_{\max})=A\left(\frac{\lambda}{4}\right)=\frac{\lambda^2}{16}\text{ cioè l'area massima la si ha in corrispondenza di un quadrato}$$

Ora suddividiamo il perimetro in due:

$2p_{circ} = x$ è il perimetro dell'aiuola circolare e $2\mathrm{p}_{\mathrm{q}} = \lambda - x$ quello del quadrato



Con queste convenzioni si ha che il lato del quadrato è $\left(\frac{\lambda - x}{4}\right)$ per cui l'area è $A_q(x) = \left(\frac{\lambda - x}{4}\right)^2$

mentre il raggio del cerchio sarà $\left(\frac{x}{2\pi}\right)$ per cui l'area sarà $A_c(x) = \pi\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 = \frac{x^2}{4\pi}$

per cui l'area totale sarà

$$A_{tot}(x) = \left(\frac{\lambda - x}{4}\right)^2 + \frac{x^2}{4\pi}, 0 \le x \le \lambda$$

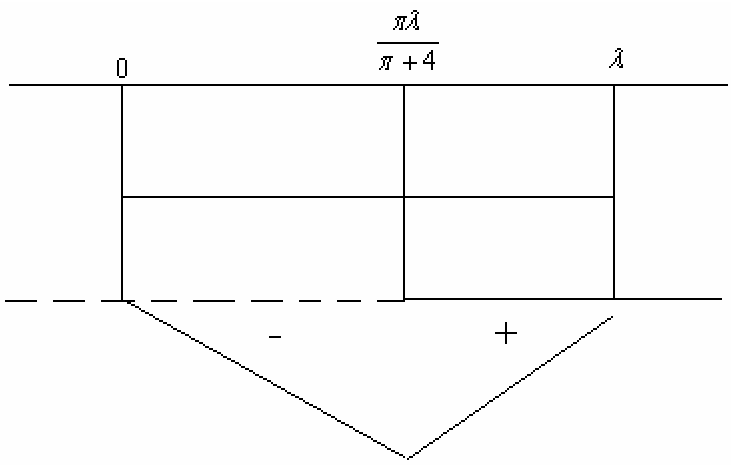
b)

Ora si calcolano le derivate della funzione $A_{tot}(x)$:

$$A_{tot}^{I}(x) = -\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda - x}{4}\right) + \left(\frac{x}{2\pi}\right) = \left(\frac{x - \lambda}{8}\right) + \left(\frac{x}{2\pi}\right) = \frac{x(\pi + 4) - \pi\lambda}{8\pi} > 0 \to x > \frac{\pi\lambda}{\pi + 4}$$

$$A_{tot}^{II}(x) = \frac{1}{8} + \frac{1}{2\pi} > 0$$

La situazione è sotto rappresentata:



Dal grafico soprastante si evince che l'area minima la si ha per $x = \frac{\pi\lambda}{\pi + 4}$ in corrispondenza della quale si ricava

$$A_{tot,\min} = A\left(\frac{\pi\lambda}{\pi+4}\right) = \left(\frac{\lambda - \frac{\pi\lambda}{\pi+4}}{4}\right)^2 + \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\pi\lambda}{\pi+4}\right)^2 = \frac{\lambda^2}{(\pi+4)^2} + \frac{\lambda^2\pi}{4(\pi+4)^2} = \frac{\lambda^2(\pi+4)}{4(\pi+4)^2} = \frac{\lambda^2}{4(\pi+4)}$$

c)
Vediamo l'area massima: in tal caso il massimo lo si raggiunge agli estremi dell'intervallo cioè per $x = 0, x = \lambda$.
Ora

$$A_{tot}(x=0) = \frac{\lambda^2}{16},$$
$$A_{tot}(x=\lambda) = \frac{\lambda^2}{4\pi} > \frac{\lambda^2}{16} = A_{tot}(x=0)$$

Per cui l'area massima la si ha per $x = \lambda$ ed è $A_{tot,\max} = \frac{\lambda^2}{4\pi}$

d)
Il volume di un parallelepipedo è dato dal prodotto delle tre dimensioni, cioè

$$V_{parallelepipedo} = l_1 l_2 l_3$$

Se si aumentano le dimensioni del 10% si ha:

$$V'_{parallelepipedo} = 1.1l_1 * 1.1l_2 * 1.1l_3 = 1.331 * l_1 l_2 l_3 = 1.331V_{parallelepipedo}$$

Per cui l'incremento percentuale del volume è del 33.1%.