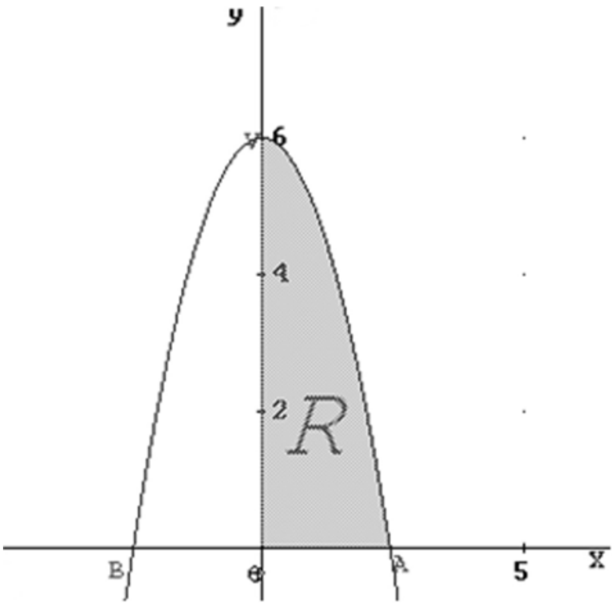
PROBLEMA 1

Nel primo quadrante del sistema di riferimento Oxy, ortogonale e monometrico, si consideri la regione *R* delimitata dagli assi coordinati e dalla parabola λ d'equazione y = 6-x^2.

Punto 1

Si calcoli il volume del solido generato dalla rotazione completa di *R* attorno all'asse y.

La parabola $y = 6 - x^2$ ha il vertice nel punto $V\left(0;6\right)$, l'asse di simmetria coincidente con l'asse delle ordinate, la concavità verso il basso, perché il coefficiente di x^2 è negativo, interseca l'asse delle ascisse nei punti $A(+\sqrt{6};0)$ e $B\left(-\sqrt{6};0\right)$.



L'arco VA è rappresentato analiticamente da

$$\begin{cases} x = g(y) = \sqrt{6-y} \\ 0 \le y \le 6 \end{cases}$$

Il volume del solido generato dalla rotazione completa di *R* attorno all'asse y è dato da

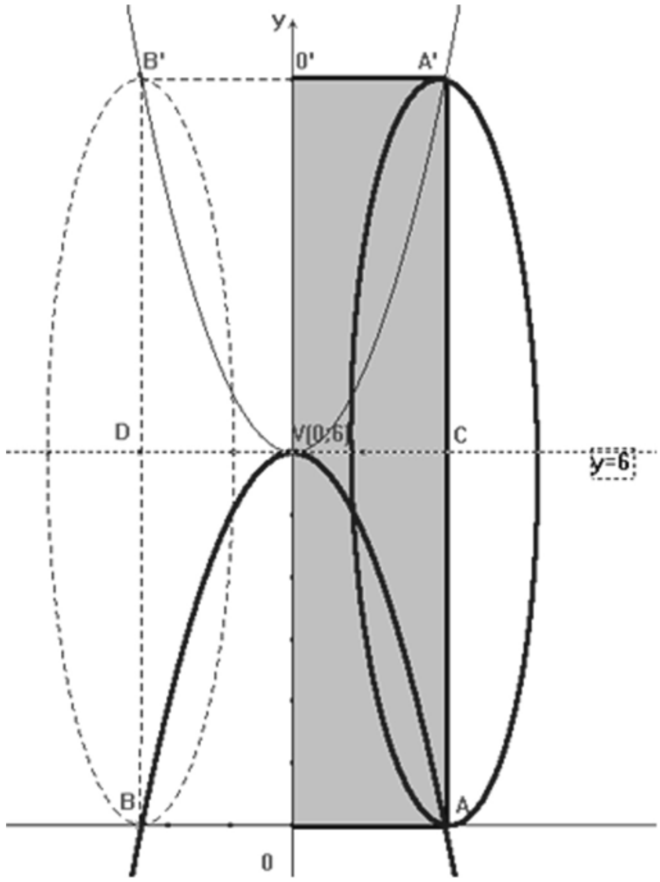
$$V_R = \pi \cdot \int_{y_A}^{y_B} \left[g(y)\right]^2 dy\,.$$

Poiché $\left[g\left(y\right)\right]^2 = x^2 = 6 - y$ il volume richiesto è

$$V_R = \pi \cdot \int_0^6 \left(6-y\right) dy = \pi \cdot \left[6y - \frac{y^2}{2}\right]_0^6 = 18\pi$$

Punto 2

Si calcoli il volume del solido generato dalla rotazione completa di *R* attorno alla retta y=6.



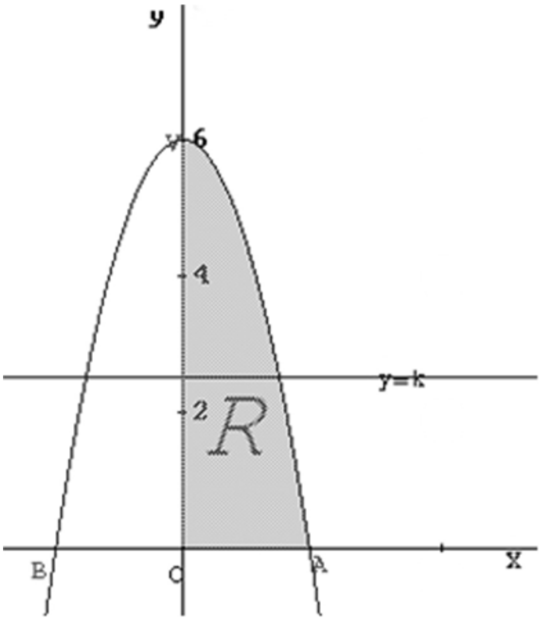
Il volume V del solido generato dalla rotazione completa di *R* attorno alla retta y=6 è […]

$$V = V_c - V_p = 36\sqrt{6}\pi - \frac{36}{5}\sqrt{6}\pi = \frac{144}{5}\sqrt{6}\pi$$

Punto 3

Si determini il valore di *k* per cui la retta *y* = *k* dimezza l'area di *R*..

Troviamo, intanto, le intersezione tra la generica retta $y = k$ parallela all'asse delle ascisse e la parabola. […] $E'\left(-\sqrt{6-k};k\right)$ e $E(+\sqrt{6-k};k)$.



[…]

$$R(k) = \int_0^{\sqrt{6-k}} \left[\left(6-x^2\right)-k\right]dx = \left[6x-\frac{x^3}{3}-kx\right]_0^{\sqrt{6-k}} = \frac{2}{3}(6-k)\sqrt{6-k}$$

quindi

$$R(k) = \frac{R}{2} \rightarrow \frac{2}{3}(6-k)\sqrt{6-k} = 2\sqrt{6}$$

[…]

Quindi, il valore di k per il quale la retta $y = k$ dimezza l'area di R è $k = 6-3\sqrt[3]{2}$.

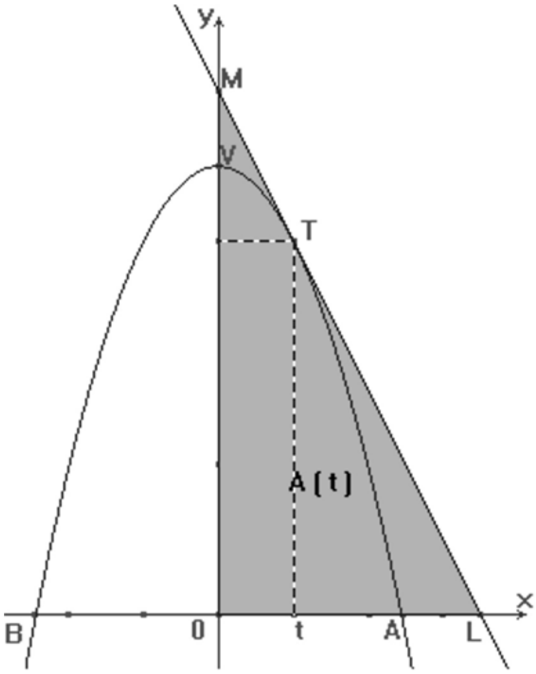
Si ottengono gli stessi risultati applicando il Teorema di Archimede:

[…]

Punto 4

Per $0 < t < \sqrt{6}$ sia *A(t)* l'area del triangolo delimitato dagli assi e dalla tangente a λ nel suo punto di ascissa *t.* Si determini A(1).

Un generico punto $P \in \lambda$ di ascissa *t* ha coordinate $P\left(t; 6-t^2\right)$. L'equazione della retta tangente al grafico di una funzione di equazione *y =f(x)* in un punto $P(x_0; y_0)$ è data dalla formula $y - y_0 = f\,'(x_0)\cdot(x-x_0)$. Poiché $f\,'(t) = -2t$, la tangente a λ nel suo punto di ascissa *t* è data dall'equazione $y-(6-t^2) = -2t\cdot(x-t) \Rightarrow y = -2tx + t^2 + 6$.



Calcoliamo le intersezione della tangente appena trovata con gli assi:

[…]

L'area *A(t)* del triangolo rettangolo MOL è data da

$$A(t) = \frac{\overline{OL}\cdot\overline{OM}}{2} = \frac{1}{2}\cdot\left(t^2+6\right)\cdot\left(\frac{t^2+6}{2t}\right) \to A(t) = \frac{\left(t^2+6\right)^2}{4t}$$

Per t=1 si ottiene $A(1) = \frac{49}{4}$.

Punto 5

Si determini il valore di *t* per il quale A(t) è minima.

La derivata prima di $A(t) = \frac{\left(t^2+6\right)^2}{4t}$ è $A'(t) = \frac{2\left(t^2+6\right)\cdot 2t\cdot 4t - 4\left(t^2+6\right)^2}{\left(4t\right)^2} = \frac{12\left(t^2+6\right)\cdot\left(t^2-2\right)}{16t^2}$.

[…]Per $t=\sqrt{2}$ si ha il minimo cercato $\overline{OM} = 8$; $\overline{OL} = 2\sqrt{2}$ e $A\left(\sqrt{2}\right) = 8\sqrt{2}$

PROBLEMA 2

Si consideri la funzione *f* definita sull'intervallo $\left[0;+\infty\right[$ da:

$$\begin{cases} f(0)=1 \\ f(x)=\frac{1}{2}x^2\left(3-2\log x\right)+1 \quad per \quad x>0 \end{cases}$$

e sia C la sua curva rappresentativa nel riferimento Oxy, ortogonale e monometrico.

Punto 1

Si stabilisca se *f* è continua e derivabile in *0*

La funzione è continua per x=0, infatti f(0)=1 e

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+}\left[\frac{1}{2}x^2\left(3-2\log x\right)+1\right]=\lim_{x\to0^+}\left[\frac{3}{2}x^2-x^2\log x+1\right]$$ e, poiché $\lim_{x\to0^+}\left[x^2\log x\right]=0$,

$$\lim_{x\to0^+}\left[\frac{3}{2}x^2-x^2\log x+1\right]=1=f\left(0\right)$$

Vediamo se è anche derivabile. Intanto, per x>0

$$f'(x)=\frac{1}{2}\left[2x\left(3-2\log x\right)+x^2\left(-\frac{2}{x}\right)\right]=2x\left(1-\log x\right)$$

Calcoliamo il limite

$$\lim_{x\to0^+} f'\left(x\right)=\lim_{x\to0^+}2x\left(1-\log x\right)=\lim_{x\to0^+}\left(2x-2x\log x\right)$$ e, poiché $\lim_{x\to0^+}x\log x=0$

si ha $\lim_{x\to0^+} f'\left(x\right)=0$.

Quindi la funzione è derivabile in 0 e la derivata è in tale punto è 0.

La derivabilità, nell'intorno destro di 0, si può stabilire anche, calcolando il limite del rapporto incrementale

[…]

Osserva che l'aver dimostrato la derivabilità della funzione in *x=0* implica che la funzione è continua in quel punto, il che rende superflua la prima parte dell'esercizio.

[…]

Punto 2

Si dimostri che l'equazione *f(x)=0* ha, sull'intervallo $\left[0;+\infty\right[$, un'unica radice reale.

La funzione f è definita, continua e derivabile $\forall x \in \left[0;+\infty\right[$.

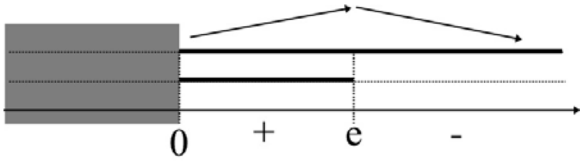
La derivata prima è $f'(x) = 2x(1-\log x)$ con $x>0$.

Studiamone il segno:

$2x(1-\log x) \geq 0$

$2x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$

$1-\log x \geq 0 \Rightarrow \log x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq x \leq e$



$f'(x) > 0 \quad per \quad x \in \left]0, e\right[$ f strettamente crescente

$f'(x) < 0 \quad per \quad x \in \left]e, +\infty\right[$ f strettamente decrescente

$f'(x) = 0 \quad per \quad x = e$ f presenta un punto di massimo per x=e

Siccome $f(e) = \frac{1}{2}e^2(3-2\log e)+1 = \frac{e^2}{2}+1 > 0$ e $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{2}x^2(3-2\log x)+1\right] = -\infty$

per il teorema degli zeri (vedi *Teoria 7.9*), la funzione si annullerà almeno una volta nell'intervallo $\left]e, +\infty\right[$. Inoltre, poiché la funzione in questo intervallo è strettamente decrescente si annullerà solo una volta.

Relativamente all'intervallo $\left]0, e\right[$, si ha *f(0)=1>0* , la funzione è strettamente crescente, pertanto non si annullerà mai in $\left]0, e\right[$.

In definitiva, l'equazione *f(x)=0* ha, nell'intervallo $\left[0;+\infty\right[$, un'unica radice reale.

Punto 3

Si disegni C e si determini l'equazione della retta r tangente a C nel punto di ascissa x=1

Dominio

La funzione f è definita, continua e derivabile $\forall x \in [0;+\infty[$.

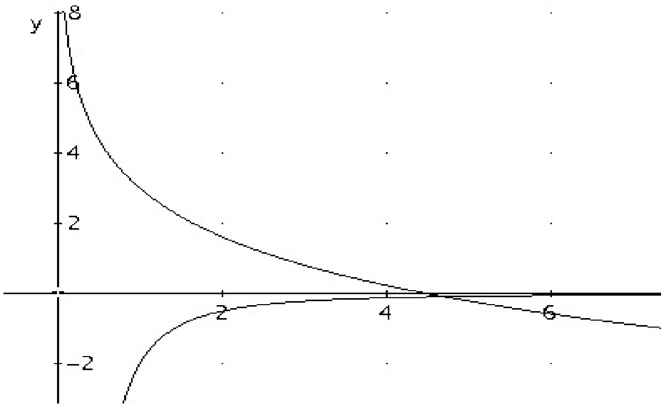
Intersezione con gli assi

Poiché *f(0)=1*, la funzione interseca l'asse delle ordinate nel punto A(0;1).

Per calcolare l'intersezione con l'asse delle ascisse risolviamo graficamente l'equazione *f(x)=0*.

Osserva che $\frac{1}{2}x^2(3-2\log x)+1=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3-2\log x=-\frac{2}{x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3-2\log x \\ y=-\frac{2}{x^2} \end{cases}$.



[…]

Limiti

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{2}x^2(3-2\log x)+1\right]=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{2}x(3-2\log x)+\frac{1}{x}\right]=-\infty$$

La funzione quindi non ha asintoti

Derivata prima

[…]

Cioè il grafico della funzione presenta il punto di massimo $M\left(e;\frac{e^2}{2}+1\right)$.

Derivata seconda

[…]

Cioè il grafico della funzione presenta un punto di flesso in $F\left(1;\frac{5}{2}\right)$.

Per determinare l'equazione della retta tangente alla curva applichiamo la formula
$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$.

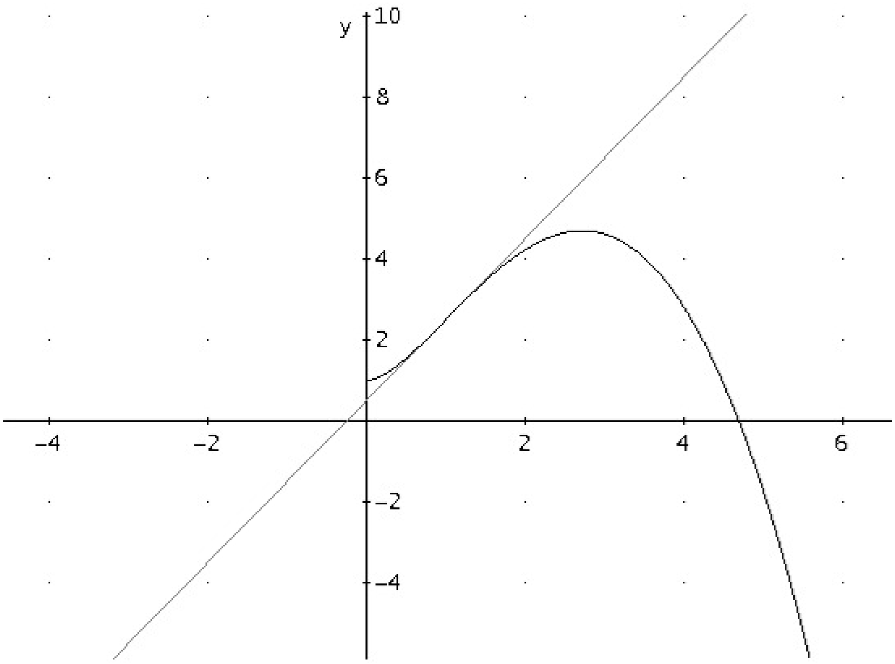
$P(x_0; y_0) \equiv F\left(1; \frac{5}{2}\right)$

$f'(x_0) = f'(1) = 2$

$y - \frac{5}{2} = 2 \cdot (x - 1)$

cioè

$y = 2x + \frac{1}{2}$.



Punto 4

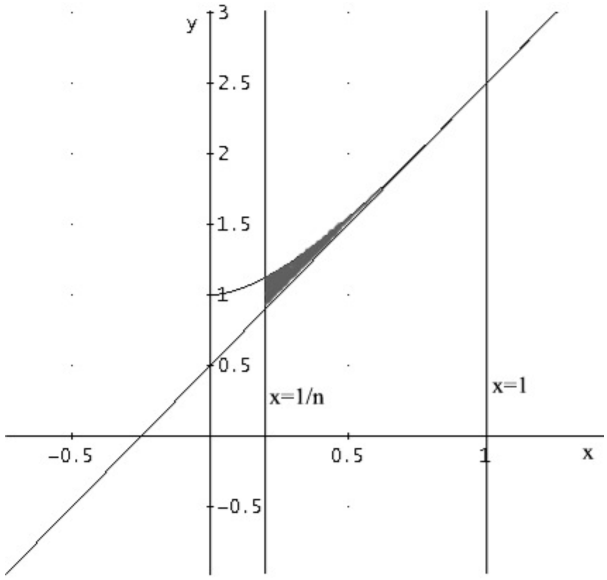
Sia *n* un intero naturale non nullo. Si esprima, in funzione di *n*, l'area A_n del dominio piano delimitato dalla curva C, dalla retta tangente *r* e dalle due rette: $x=\frac{1}{n}$ e x=1

L'area A_n si ottiene calcolando il seguente integrale definito

$$\int_{\frac{1}{n}}^{1}\left[\left(\frac{3}{2}x^2-x^2\ln x+1\right)-\left(2x+\frac{1}{2}\right)\right]dx.$$

Con il metodo dell'integrazione per parti si ha

[…]



Punto 5

Si calcoli il limite per $n\to+\infty$ di A_n e si interpreti il risultato ottenuto.

$$\lim_{n\to+\infty}A_n=\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{9}-\frac{\ln n}{3n^3}+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{2n}-\frac{11}{18n^3}\right]=\frac{1}{9}$$

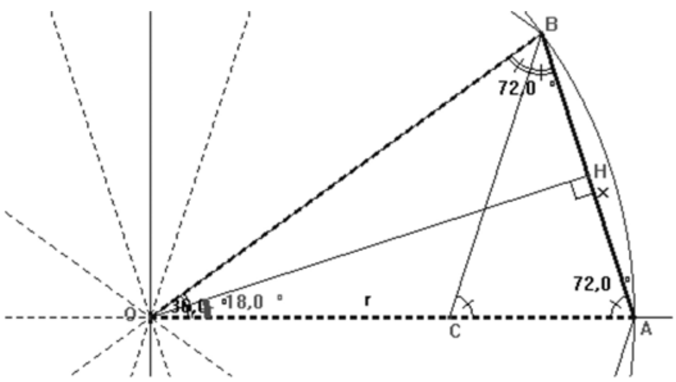
[…]

Quesito 1

Si dimostri che il lato del decagono regolare inscritto in un cerchio è sezione aurea del raggio e si utilizzi il risultato per calcolare *sen18°*, *sen36°*.

Il decagono regolare è scomponibile in dieci triangoli isosceli. Consideriamo il triangolo BOA della figura, esso ha l'angolo al vertice di 36° (decima parte dell'angolo giro) e gli angoli alla base di 72°. Indichiamo con *x* la misura del lato del decagono, con *r* la lunghezza del raggio della circonferenza circoscritta al decagono.

Si ha $\overline{OB}=\overline{OA}=r$; $\overline{AB}=x$; $B\hat{O}A=36°$; $O\hat{A}B=A\hat{B}O=72°$.



Tracciata la bisettrice BC dell'angolo ABO si ottiene il triangolo ABC, CHE è simile al triangolo AOB, infatti *BOA=ABC=36°; OAB=ABO=BCA=CAB= 72°*.

Siccome i due triangoli ABC e OBC sono isosceli si ha $\overline{AB}=\overline{BC}$ e $\overline{OC}=\overline{BC}$ da cui $\overline{AB}=\overline{OC}$.

Quindi

1) $\overline{AB} = \overline{OC} = x \quad e \quad \overline{CA} = \overline{OA} - \overline{OC} = r - x$

Dalla similitudine dei triangoli ABC e AOB si ottiene

2) $\overline{OA} : \overline{AB} = \overline{AB} : \overline{CA} \xrightarrow{per \quad la \quad 1)} \overline{OA} : \overline{OC} = \overline{OC} : \overline{CA} \to r : x = x : r - x$

Pertanto il lato del decagono regolare inscritto in un cerchio è sezione aurea del raggio, ossia è medio proporzionale tra l'intero raggio e la parte rimanente.

Dalla 2) si ottiene $x^2 + rx - r^2 = 0 \to x_{1/2} = r\dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$, eliminando la soluzione negativa si ha

3) $x = r\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

La bisettrice OH dell'angolo BOA, divide il triangolo isoscele BOA in due triangoli rettangoli congruenti: AHO e OHB, con AH=HB=x/2 .

Applichiamo al triangolo ABC le formule risolutive dei triangoli rettangoli, si ha:

$\overline{AH} = \overline{AO} \cdot sen\, H\hat{O}A \to \dfrac{x}{2} = r \cdot sen18° \Rightarrow sen18° = \dfrac{x}{2r}$.

Tenendo conto della 3) si ha: $sen18° = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$.

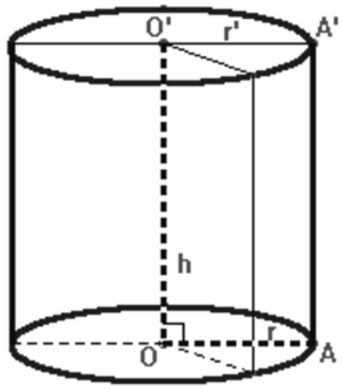
Per le formule di duplicazione,

$sen36° = sen2 \cdot 18° = 2 \cdot sen18° \cdot \cos 18° = 2 \cdot \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4} \cdot \sqrt{1 - \left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}\right)^2}$.

Da cui $sen36° = \dfrac{1}{4} \cdot \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$

Quesito 2

Una bevanda viene venduta in lattine, ovvero contenitori a forma di cilindro circolare retto, realizzati con fogli di latta. Se una lattina ha la capacità di *0,4 litri*, quali devono essere le sue dimensioni in *centimetri*, affinché sia minima la quantità di materiale necessario per realizzarla? (Si trascuri lo spessore della latta).



Indichiamo con r la lunghezza del raggio di base, cioè poniamo $\overline{OA} = r$ e con h l'altezza del cilindro cioè $\overline{OO'} = h$.
La superficie totale del cilindro è data dalla formula:
$S_T = 2 \cdot S_b + S_l = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r(r+h)$; il volume è dato dalla formula :$V_c = \pi r^2 h$
[…]

$$S_T(r) = 2\pi r^2 + \frac{800}{r}.$$

Per ricavare il valore minimo di S_T, al variare di r, studiamo il segno della derivata prima:
[…]
Affinché sia minima la quantità di materiale necessario per realizzare la lattina si deve avere $r = \sqrt[3]{\frac{200}{\pi}} cm$ *e* $h = \frac{400}{\pi r^2} = \frac{400}{\pi \left(\sqrt[3]{\frac{200}{\pi}}\right)^2} = \frac{400\sqrt[3]{\frac{200}{\pi}}}{200} = 2\sqrt[3]{\frac{200}{\pi}} cm$

Poiché $h = 2r$ il cilindro è un cilindro equilatero.

Quesito 3

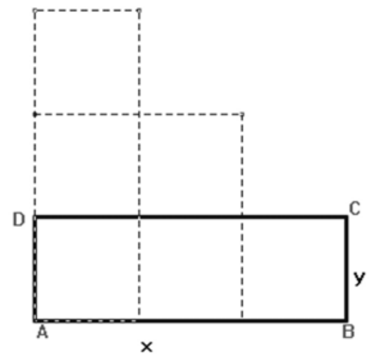
Si dimostri che la curva $y = x \operatorname{sen} x$ è tangente alla retta *y = x* quando *senx =1* ed è tangente alla retta *y=-x* quando *senx=-1*.

[…]

Quesito 4

Si dimostri che, tra tutti i rettangoli di dato perimetro, quello di area massima è un quadrato.

Consideriamo un generico rettangolo ABCD di base $\overline{AB} = x$ e altezza $\overline{BC} = y$, indichiamo con p il semiperimetro. Il perimetro del rettangolo è dato dalla somma dei lati cioè $2p = 2x + 2y \Rightarrow p = x + y$, l'area è data da: $A = x \cdot y$.



Mettendo a sistema le due equazioni trovate si ottiene l'area in funzione della variabile x:

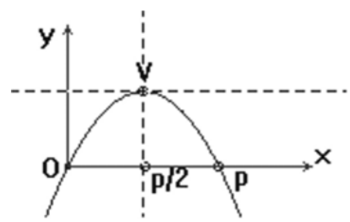
$$\begin{cases} x + y = p \\ A = x \cdot y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = p - x \\ A = x \cdot y \end{cases} \rightarrow A(x) = x(p - x) = -x^2 + px$$

Studiamo il segno della derivata prima di *A(x)*

[…]

Sostituendo il valore $x = \frac{p}{2}$ nell'equazione $y = p - x$ si ottiene $y = \frac{p}{2}$, da cui risulta che *y*=*x* e il rettangolo è un quadrato.

Osserva che a questo risultato si può giungere direttamente senza studiare la derivata, in quanto la funzione $A(x) = -x^2 + px$ rappresenta una parabola con la concavità verso il basso. Il vertice di ascissa $x = \frac{p}{2}$ è il punto di massimo della parabola.



Quesito 5

Come si definisce e qual è l'importanza del numero *e* di *Nepero* [nome latinizzato dello scozzese John Napier (1550-1617)]? Perché la derivata di e^x è e^x ?

[…]
Per un approfondimento sull'importanza del numero *e*, consulta
http://www.matematicamente.it/storia/nepero_eulero.htm

Quesito 6

Come si definisce n! (*n* fattoriale) e quale ne è il significato nel calcolo combinatorio? Qual è il suo legame con i coefficienti binomiali? Perché?

[…]

Quesito 7

Se $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 3$, per quanti numeri reali *k* è *f(k)=2* ? Si illustri il ragionamento seguito.

Scomponiamo il polinomio iniziale nella somma di due quantità positive

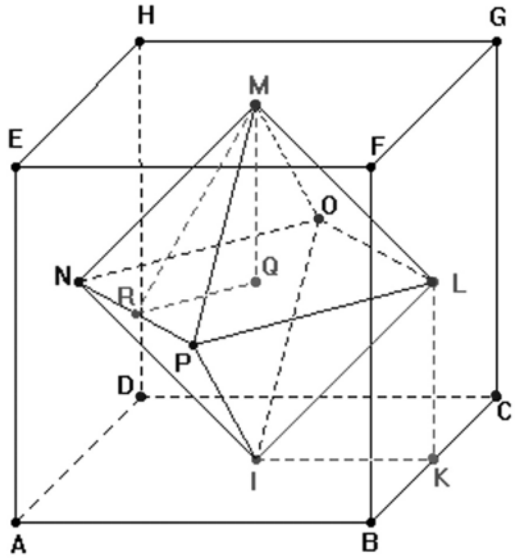
$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 3 = x^2\left(x^2 - 4x + 4\right) + 3 = x^2\left(x-2\right)^2 + 3 = \left[x\left(x-2\right)\right]^2 + 3$$

siccome $\left[x\left(x-2\right)\right]^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ si ha $\left[x\left(x-2\right)\right]^2 + 3 \geq 3 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, cioè $f(x) \geq 3 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, questo vuol dire che *non esiste nessun valore di* $k \in \mathbb{R}$ *tale che* $f(k) = 2$.

Si può rispondere al quesito anche in un secondo modo.
[…]

Quesito 8

I centri delle facce di un cubo sono i vertici di un ottaedro. E' un ottaedro regolare? Quale è il rapporto tra i volumi dei due solidi?



Nella figura gli spigoli del cubo sono: *AB, BC, CD, DA, AE, EF, FG, GH, …*; gli spigoli dell'ottaedro sono *PL, LO, ON, NP, PI, IL, …* Indichiamo con *l* la lunghezza dello spigolo del cubo ($\overline{AB}=\overline{BF}=\overline{FG}=l$), consideriamo il triangolo rettangolo isoscele IKL; esso ha i cateti $\overline{IK}=\dfrac{\overline{AB}}{2}=\overline{LK}=\dfrac{\overline{FB}}{2}=\dfrac{l}{2}$. La lunghezza dell'ipotenusa *IL*, che è lo spigolo dell'ottaedro, si può calcolare con il teorema di Pitagora, si ottiene $\overline{LI}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}l$.

Evidentemente, questo ragionamento si può ripetere per ogni spigolo dell'ottaedro, se ne deduce che gli spigoli sono congruenti e che l'ottaedro è regolare.

Indicando con *s* la lunghezza dello spigolo dell'ottaedro si ha $s=\dfrac{\sqrt{2}}{2}l$.

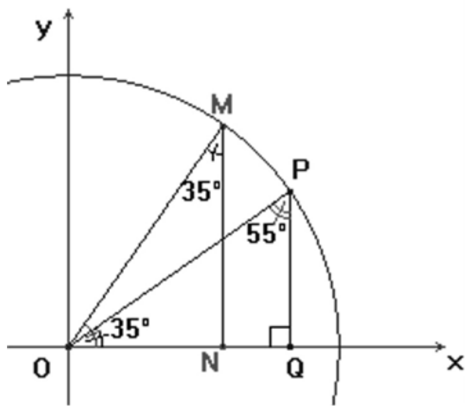
Il volume V_o dell'ottaedro si può calcolare tenendo conto che esso è formato da due piramidi equivalenti, aventi la stessa base quadrata *PLON* e altezza congruente a metà dello spigolo del cubo

$$V_o=2\cdot\frac{\overline{NP}^2\cdot\overline{MQ}}{3}=2\frac{s^2\cdot\frac{l}{2}}{3}=\frac{l^3}{6}.$$

Poiché il volume del cubo è dato da $V_c=l^3$, si ha $\dfrac{V_c}{V_o}=6$. Cioè il volume del cubo è 6 volte il volume dell'ottaedro.

Quesito 9

Si calcoli, senza l'aiuto della calcolatrice, il valore di: $sen^2 35^\circ + sen^2 55^\circ$ **, ove le misure degli angoli sono in gradi sessagesimali.**



Applicando le formule su gli angoli complementari si ha:

$$sen^2 35°+sen^2 55°=\left[sen\left(90°-55°\right)\right]^2+\left[sen\ 55°\right]^2=$$

$$\left[\cos 55°\right]^2+\left[sen\ 55°\right]^2=\cos^2 55°+sen^2 55°=1.$$

[…]

Quesito 10

Si dimostri, calcolandone la derivata, che la funzione $f(x) = arctgx - arctg\,\frac{x-1}{x+1}$ è costante, indi si calcoli il valore di tale costante.

La funzione $f(x) = arctgx - arctg\,\frac{x-1}{x+1}$ è definita $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1\}$.
Studiamo i limiti nel punto *x=-1*, che è di accumulazione ma non appartiene al dominio.
[…]
Si vede che la funzione non è costante in tutto il dominio e presenta nel punto di ascissa *x=-1* una discontinuità di prima specie.
Calcoliamo la derivata prima:
[…]
Per il corollario 2 del teorema di Lagrange (vedi *Teoria* 8.8) applicato separatamente agli intervalli $]-\infty,-1[$ e $]-1,+\infty[$ la funzione è costante in ciascuno di questi intervalli, anche se la costante non è la stessa, in quanto come già visto dallo studio dei limiti, nell'intervallo $]-\infty,-1[$ la costante è $-\frac{3}{4}\pi$, mentre nell'intervallo $]-1,+\infty[$ la costante è $\frac{\pi}{4}$. Quindi, *f(x)* è costante a tratti.