PROBLEMA 1

Nel piano Oxy sono date le curve λ e *r* d'equazioni:

$$\lambda: x^2 = 4(x-y) \quad e \quad r: 4y = x+6$$

Punto 1

Si provi che λ e *r* non hanno punti comuni.

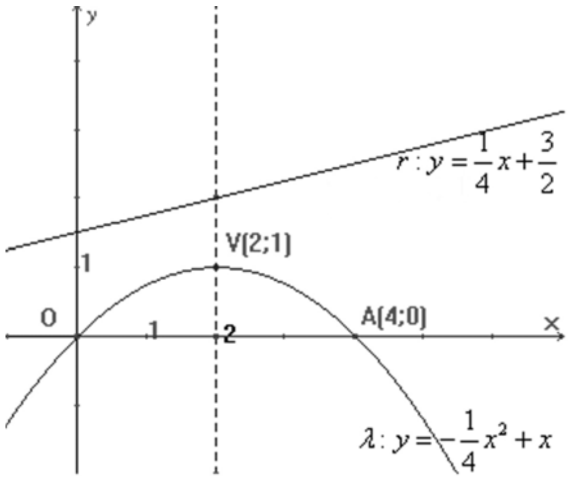
Scriviamo le equazioni in forma esplicita:

$\lambda: y = -\frac{1}{4}x^2 + x \quad e \quad r: y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$.

Esse rappresentano rispettivamente una parabola e una retta.

La parabola $\lambda: y = -\frac{1}{4}x^2 + x$ ha il vertice nel punto $V(2;1)$, l'asse di simmetria parallelo all'asse delle ordinate di equazione *x=2*, la concavità verso il basso perché il coefficiente del termine quadratico è negativo, interseca gli assi nei punti *O(0,0)* e *A(4,0).*

La retta $r: y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$ ha coefficiente angolare $m = \frac{1}{4}$, interseca gli assi nei punti $E\left(0;\frac{3}{2}\right)$e $F(-6;0)$.



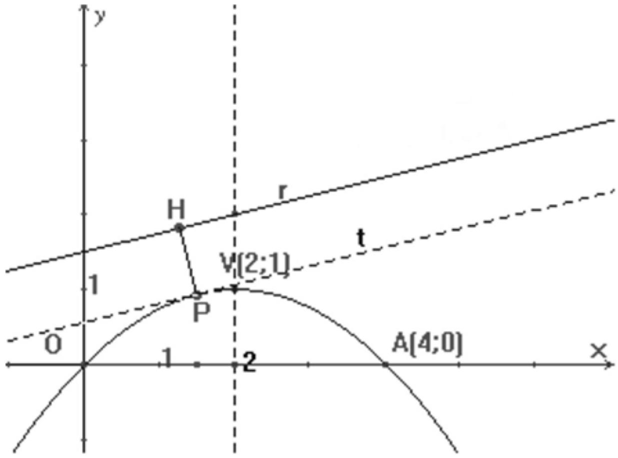
Per provare che λ e *r* non hanno punti comuni risolviamo il sistema formato dalle due equazioni:

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{4}x^2 + x \\ y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{2} \end{cases} \rightarrow -\frac{1}{4}x^2 + x = \frac{1}{4}x + \frac{3}{2} \rightarrow x^2 - 3x + 6 = 0$$

L'equazione $x^2 - 3x + 6 = 0$ non ha soluzioni reali, perché il discriminante è negativo$(\Delta = -15 < 0)$, quindi le due curve λ e *r* non hanno punti comuni.

Punto 2

Si trovi il punto $P \in \lambda$ che ha distanza minima da *r*.



Un punto generico $P \in \lambda$ ha coordinate $P\left(x ;-\frac{1}{4}x^2 + x \right)$.

La distanza del punto P dalla retta r è data da:

$$d(x) = \frac{\left|x^2 - 3x + 6\right|}{\sqrt{17}} = \frac{\sqrt{17}}{17} \cdot \left(x^2 - 3x + 6\right),$$

il valore assoluto è stato tolto in quanto la quantità all'interno è sempre positiva.

Per stabilire quando questa distanza è minima, studiamo il segno della derivata prima […]

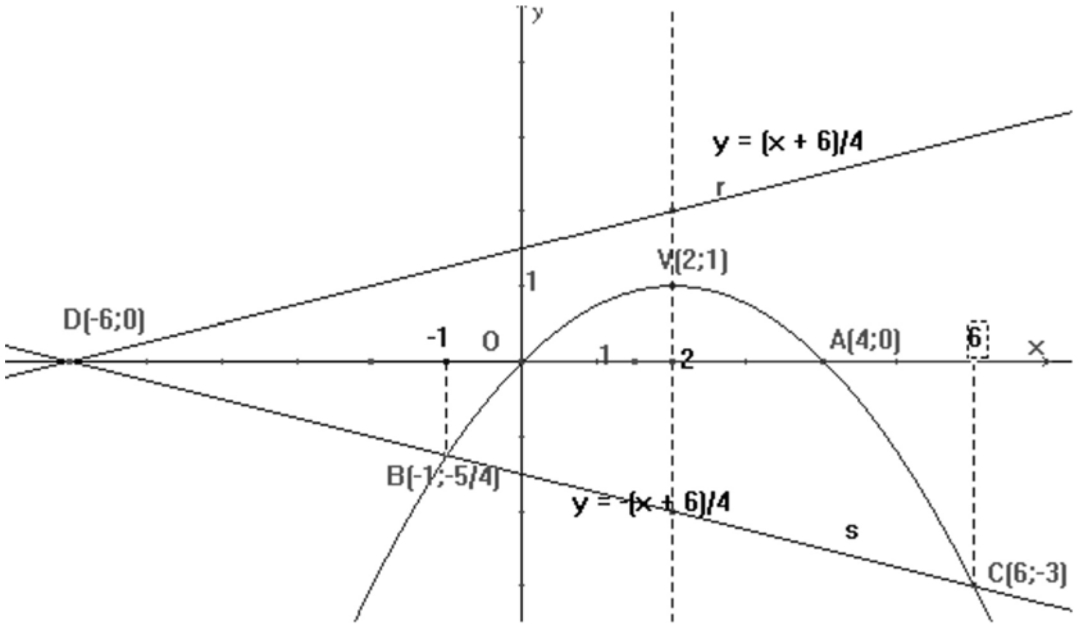
Quindi il punto che ha la distanza minima è $P\left(\frac{3}{2};\frac{15}{16}\right)$.

Da notare che, il punto *P* della parabola che ha distanza minima dalla retta è il punto della parabola in cui la tangente *t* è parallela alla retta *r*. Il quesito, perciò, si poteva risolvere algebricamente imponendo che il sistema $\begin{cases} y = -\frac{1}{4}x^2 + x \\ y = \frac{1}{4}x + 9 \end{cases}$ abbia due soluzioni coincidenti e cioè il discriminante nullo.

Punto 3

Si determini l'area della regione finita di piano racchiusa da λ e dalla retta *s*, simmetrica di *r* rispetto all'asse x.

Per determinare l'equazione della retta *s* simmetrica di *r* rispetto all'asse delle *x* usiamo le equazioni della simmetria assiale $\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$. Poiché la retta *r* ha equazione $y = \frac{x+6}{4}$, l'equazione della retta *s* è $y = -\frac{1}{4}x - \frac{3}{2}$.



Per trovare le intersezioni tra quest'ultima retta e la parabola bisogna risolvere il sistema di secondo grado formato dalle equazioni delle due curve:

[…]

quindi troviamo i punti $B\left(-1;-\frac{5}{4}\right)$ e $C\left(6;-3\right)$ rappresentati in figura.

L'area della regione finita di piano racchiusa da λ e dalla retta *s*, si ottiene dal seguente integrale definito:

$$\int_{-1}^{6}\left[-\frac{1}{4}x^2 + x - \left(-\frac{1}{4}x - \frac{3}{2}\right)\right]dx = [...] = \frac{343}{24}$$

Per calcolare l'area richiesta, si può usare anche il teorema di Archimede relativo al calcolo dell'area del segmento parabolico.

Punto 4

Si determini il valore di *c* per il quale la retta *y* = *c* divide a metà l'area della regione S del I quadrante compresa tra λ e l'asse x.

L'area S coincide con l'area del segmento parabolico OAV e si può calcolare in due modi:

I) Con il teorema di Archimede $S = \frac{2}{3} \cdot \overline{OA} \cdot \overline{VK} = \frac{2}{3} \cdot 4 \cdot 1 = \frac{8}{3}$

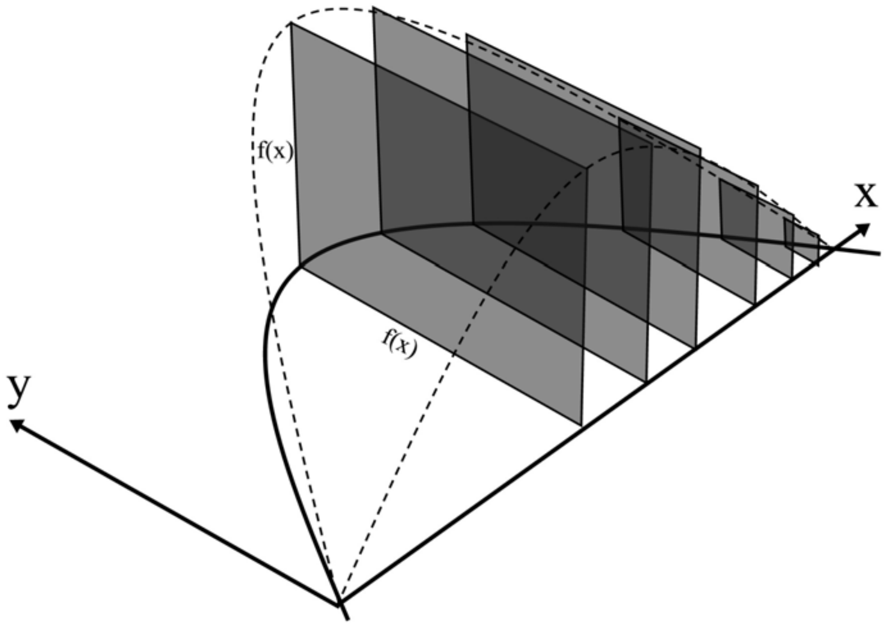
II) Con il calcolo integrale $S = \int_0^4 \left(-\frac{1}{4} x^2 + x \right) dx = \left[-\frac{1}{12} x^3 + \frac{x^2}{2} \right]_0^4 = \frac{8}{3}$

[…]

Punto 5

Si determini il volume del solido di base S le cui sezioni ottenute con piani ortogonali all'asse x sono quadrati.

Ogni sezione ottenuta con piani ortogonali all'asse x è un quadrato di lato $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + x$ e di area $\left[f(x)\right]^2$. Per calcolare il volume del solido di base S dobbiamo integrare da 0 a 4 la funzione elevata alla seconda(che rappresenta l'area del quadrato) ,cioè $V = \pi \cdot \int_0^4 \left[f(x)\right]^2 dx$



$$V = \int_0^4 \left[-\frac{1}{4}x^2 + x\right]^2 dx = [...] = \frac{32}{15}$$

PROBLEMA 2

Si consideri la funzione *f* definita sull'intervallo $\left[0;+\infty\right[$ da:

$$\begin{cases} f(0)=1 \\ f(x)=\frac{1}{2}x^2\left(3-2\log x\right)+1 \quad per \quad x>0 \end{cases}$$

e sia C la sua curva rappresentativa nel riferimento Oxy, ortogonale e monometrico.

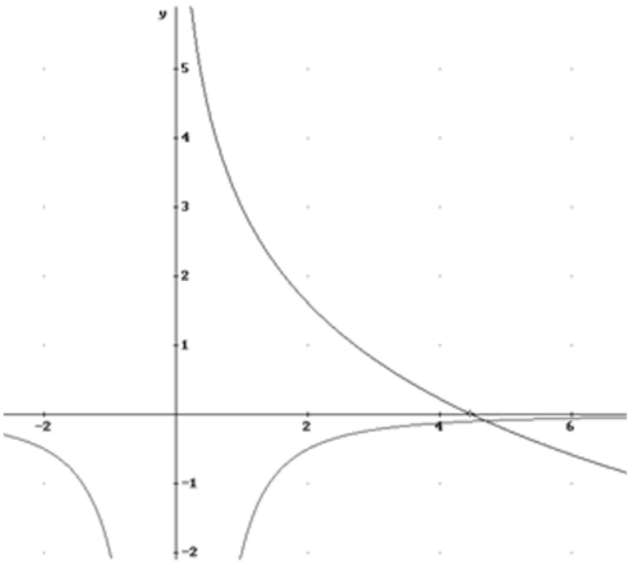
1. Si stabilisca se *f* è *continua* e *derivabile* in *0*
2. Si dimostri che l'equazione *f(x)=0* ha, sull'intervallo $\left[0;+\infty\right[$, un'unica radice reale **e se ne calcoli un valore approssimato con due cifre decimali esatte.**
3. Si disegni C e si determini l'equazione della retta r tangente a C nel punto di ascissa x=1
4. Sia *n* un intero naturale non nullo. Si esprima, in funzione di *n*, l'area A_n del dominio piano delimitato dalla curva C, dalla retta tangente *r* e dalle due rette: $x=\frac{1}{n}$ e x=1

Si calcoli il limite per $n\to+\infty$ di A_n e si interpreti il risultato ottenuto.

Il problema è identico al PROBLEMA 2 del CORSO DI ORDINAMENTO a.s. 2004-2005, ad eccezione del quesito 2, nel quale è chiesto di calcolare un valore approssimato con due cifre decimali esatte della radice dell'equazione f(x)=0. Presentiamo qui solo la parte relativa allo svolgimento di questo punto, il resto del problema è stato svolto nelle pagine precedenti.

Poiché $f(e)=\frac{e^2}{2}+1>0$ e $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{2}x^2\left(3-2\log x\right)+1\right]=-\infty$ per il teorema degli zeri, la funzione si annullerà almeno una volta nell'intervallo $\left]e,+\infty\right[$ e siccome la funzione in tale intervallo è strettamente decrescente si annullerà solo una volta.
Inoltre poiché *f(0)=1>0* e la funzione strettamente è crescente nell'intervallo $\left]0,e\right[$, l'equazione *f(x)=0* non ha radice nell'intervallo $\left]0,e\right[$. In definitiva *f(x)=0* ha, un'unica radice reale nell'intervallo $\left[0;+\infty\right[$.
Un'approssimazione della radice si può trovare risolvendo graficamente l'equazione $\frac{1}{2}x^2\left(3-2\log x\right)+1=0 \Leftrightarrow 3-2\log x=-\frac{2}{x^2}$, ossia cercando i punti di intersezione delle due curve

$$\begin{cases} y=3-2\log x \\ y=-\frac{2}{x^2} \end{cases}.$$



Dal grafico si vede che la radice c è compresa tra 4 e 5.

Vediamo se nell'intervallo $\left[e^{\frac{3}{2}},5\right]$ sono verificate le ipotesi del teorema degli zeri. La funzione è continua bel suddetto intervallo. Inoltre:

$$f\left(e^{\frac{3}{2}}\right)=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{3}{2}}\right)^2\left(3-2\ln\left(e^{\frac{3}{2}}\right)\right)+1=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{3}{2}}\right)^2\cdot 0+1=1>0$$

$$f(5)=\frac{1}{2}5^2\cdot(3-2\ln 5)+1\simeq\frac{25}{2}\cdot(-0.2189)+1\simeq-1.7359<0$$

Applichiamo il metodo delle tangenti, partendo da $x_0=5$, si ha

[…]

Il valore cercato è quindi 4.69.

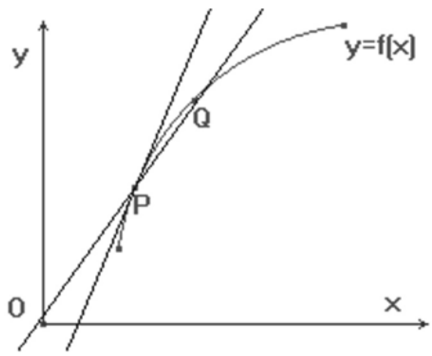
Quesito 1

Si dimostri che il lato del decagono regolare inscritto in un cerchio è sezione aurea del raggio e si utilizzi il risultato per calcolare *sen18°, sen36°*.

Il quesito è identico al quesito 1 del tema assegnato al corso di ordinamento, al quale si rimanda per la soluzione.

Quesito 2

Si dia una definizione di retta tangente ad una curva (PNI).
Si dimostri che la curva $y = x\,sen x$ è tangente alla retta *y = x* quando *senx =1* ed è tangente alla retta *y=-x* quando *senx=-1*.



Si possono dare varie definizioni di retta tangente
Dal punto di vista *geometrico* la tangente ad una curva in un suo punto P è una retta che ha con la curva almeno un'intersezione di molteplicità due in quel punto cioè ha almeno due intersezioni coincidenti con P.
Dal punto di vista *analitico* la retta tangente ad una curva in un suo punto P, se esiste, è la retta limite di tutte le rette che intersecano la curva in P e in un altro punto Q della curva, quando Q, percorrendo l'arco QP sulla curva, si avvicina indefinitivamente a P.
L'equazione della retta tangente alla curva di equazione $y=f(x)$ nel punto P è $y-y_0=f'(x_0)\cdot(x-x_0)\quad con\quad P(x_0;y_0)$.

La seconda parte del quesito è identica al quesito 2 del tema assegnato al corso di ordinamento, al quale si rimanda per la soluzione.

Quesito 3

Si determinino le equazioni di due simmetrie assiali σ e φ la cui composizione $\sigma\circ\varphi$ dia luogo alla traslazione di equazione:

$$\begin{cases} x'=x+\sqrt{5} \\ y'=y-\sqrt{5} \end{cases}$$

Si determinino poi le equazioni della trasformazione che si ottiene componendo le due simmetrie in ordine inverso $\varphi\circ\sigma$.

Una traslazione si può ottenere componendo due simmetrie assiali con assi paralleli tra di loro e perpendicolari alla direzione della traslazione.

La traslazione $\begin{cases} x' = x + \sqrt{5} \\ y' = y - \sqrt{5} \end{cases}$ ha vettore $\vec{V}\left(\sqrt{5}, -\sqrt{5}\right)$, si può ottenere dalla composizione di due simmetrie assiali σ **e** φ con assi paralleli tra di loro e perpendicolari al vettore traslazione $\vec{V}\left(\sqrt{5}, -\sqrt{5}\right)$. I due assi delle simmetrie hanno distanza $\overline{OH}$ uguale alla metà del modulo, cioè $\overline{OH} = \frac{\left|\vec{V}\right|}{2} = \frac{\sqrt{10}}{2}$.

Indichiamo con σ la simmetria di asse r’: $y = x - \sqrt{5}$ e con φ la simmetria di asse r: $y = x$.

[…]

Le equazioni della traslazione che si ottiene componendo le due simmetrie in ordine inverso $\varphi \circ \sigma$ sono $\begin{cases} x' = x - \sqrt{5} \\ y' = y + \sqrt{5} \end{cases}$; la traslazione è individuata dal vettore $\vec{W}\left(-\sqrt{5}, +\sqrt{5}\right)$ opposto al vettore $\vec{V}\left(\sqrt{5}, -\sqrt{5}\right)$.

Quesito 4

Una bevanda viene venduta in lattine, ovvero contenitori a forma di cilindro circolare retto, realizzati con fogli di latta. Se una lattina ha la capacità di *0,4 litri*, quali devono essere le sue dimensioni in *centimetri*, affinché sia minima la quantità di materiale necessario per realizzarla? (Si trascuri lo spessore della latta).

Il quesito è identico al quesito 2 del tema assegnato al corso di ordinamento, al quale si rimanda per la soluzione.

Quesito 5

Come si definisce e quale è l’importanza del numero *e* di *Nepero* [nome latinizzato dello scozzese John Napier (1550-1617)]? Si illustri una procedura che consenta di calcolarlo con precisione voluta.(PNI)

[…]

[…]quindi basta scegliere il valore di *n.* Di seguito riportiamo le soluzioni per alcuni valori di *n.*

n	a_n	b_n	errore	errore%
10	2,5937	2,8531	0,2594	10%
50	2,6916	2,7454	0,0538	2%
100	2,7048	2,7319	0,0270	1%
1000	2,7169	2,7196	0,0027	0,1%
10000	2,7181	2,7184	0,0003	0,01%

Un altro modo per ottenere il numero di Nepero con la precisione voluta è quello di considerare il seguente sviluppo in serie di MacLaurin della funzione esponenziale $f(x) = e^x$:

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ...$$

assumendo come valore approssimato di e^x la somma dei primi *n+1* termini si commette un errore $E < \frac{x^n}{n!} \cdot \frac{x}{n+1-x}$.

Ponendo x=1 si ottiene $e \approx 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+...+\frac{1}{n!}$ con un errore $E < \frac{1}{n \cdot n!}$.

Per un approfondimento sull'importanza del numero *e*, consulta http://www.matematicamente.it/storia/nepero_eulero.htm

Quesito 6

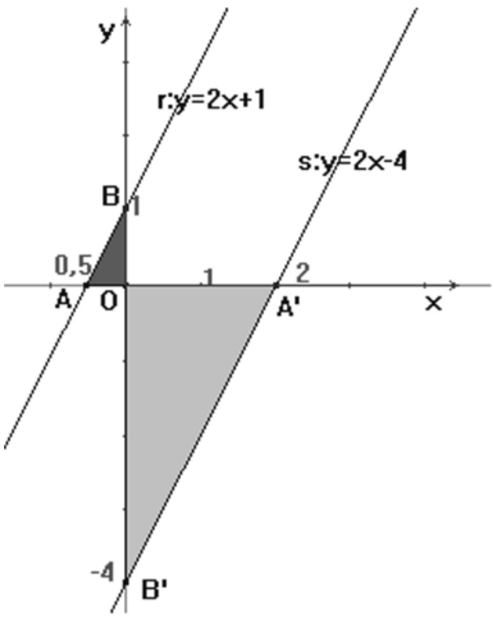
Le rette *r* e *s* d'equazioni rispettive *y=1+2x e y=2x-4* si corrispondono in una omotetia σ di centro l'origine O. Si determini σ.

Le rette *r: y=2x+1* e *s: y=2x-4* sono parallele, perché hanno lo stesso coefficiente angolare *m=2*. D'altra parte, poiché si corrispondono in una omotetia devono necessariamente essere parallele.

Le equazioni di una generica omotetia sono $\begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases}$,

applicando la trasformazione alla retta *s*: *y=2x-4* si ha $ky = 2kx - 4 \xrightarrow{k \neq 0} y = 2x - \frac{4}{k}$. Siccome questa retta deve corrispondere alla retta *r*: *y=2x+1* si ottiene $-\frac{4}{k} = 1 \rightarrow k = -4$.

[…]



Quesito 8

Si trovi l'equazione della retta tangente alla curva di equazioni parametriche $x = e^t + 2$ **e** $y = e^{-t} + 3$ **nel suo punto di coordinate (3, 4).**

L'equazione cartesiana della curva si ottiene eliminando il parametro *t* dalle due equazioni

$$\begin{cases} x = e^t + 2 \\ y = e^{-t} + 3 \end{cases} \to \begin{cases} e^t = 2 - x \\ \dfrac{1}{e^t} = 3 - y \end{cases} \xrightarrow{y \neq 3} \begin{cases} e^t = 2 - x \\ e^t = \dfrac{1}{3 - y} \end{cases} \xrightarrow{\text{confronto con } (x \neq 2)} 3 - y = \frac{1}{2 - x} \Rightarrow y = 3 + \frac{1}{x - 2}$$

cioè $y = \dfrac{3x - 5}{x - 2}$.

Si tratta di una funzione omografica, che rappresenta un'iperbole equilatera i cui asintoti sono le rette di equazione *x=2* e *y=3*. In generale, gli asintoti di una omografia $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$ sono $x = -\dfrac{d}{c}$ e $y = \dfrac{a}{c}$ (vedi *Teoria 3.6*).

[…]

Quesito 9

Qual è la probabilità di ottenere 10 lanciando due dadi? Se i lanci vengono ripetuti qual è la probabilità di avere due 10 in sei lanci? E qual è la probabilità di avere almeno due 10 in sei lanci?

Calcoliamo la probabilità di ottenere 10 lanciando due dadi. Indichiamo con F **i casi favorevoli all'evento** $A = \{\text{ottenere 10 lanciando due dadi}\}$ **e con** N **tutti i casi possibili nel lancio di due dadi.**

Riportiamo in una matrice tutti i possibili risultati del lancio di due dadi non truccati, evidenziando i casi favorevoli all'evento ***A***.

$$\begin{Vmatrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & \mathbf{(4,6)} \\ (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & \mathbf{(5,5)} & (5,6) \\ (6,1) & (6,2) & (6,3) & \mathbf{(6,4)} & (6,5) & (6,6) \end{Vmatrix}$$

Quindi i casi favorevoli sono 3, i casi possibili sono 36. Dalla definizione classica di probabilità si ha $P(A) = \frac{F}{N} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$.

Calcoliamo la probabilità di avere due 10 in sei lanci. Indichiamo con ***B*** l'evento {ottenere due 10 in 6 lanci di 2 dadi}. Poiché il lancio viene ripetuto sei volte, la probabilità dell'evento **B** si può calcolare con la *distribuzione binomiale* $P_{n,k}$, che permette di determinare la probabilità che sulle *n* prove eseguite, l'evento A si verifichi *k* volte:

$$P_{n,k} = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

dove *p* è la probabilità che in una prova si verifichi l'evento *A* e *q=1-p* è la probabilità che in una prova si verifichi l'evento contrario $\overline{A}$.

Nel nostro caso si ha:

$$P_{6,2}(B) = \binom{6}{2} \cdot \left(\frac{1}{12}\right)^2 \cdot \left(\frac{11}{12}\right)^4 = \frac{6 \cdot 5}{2} \cdot \frac{1}{12^2} \cdot \frac{11^4}{12^4} \simeq 0,0735$$

Calcoliamo la probabilità di avere almeno due 10 in sei lanci. Indichiamo con ***C*** l'evento {ottenere almeno due 10 in 6 lanci di 2 dadi}. In questo caso si può usare il teorema della probabilità contraria, $P(C) = 1 - P\left(\overline{C}\right)$ dove $P\left(\overline{C}\right)$ rappresenta la probabilità dell'evento contrario, cioè la probabilità di osservare al massimo un 10 in 6 lanci.

$$P\left(\overline{C}\right) = \binom{6}{0}\left(\frac{1}{12}\right)^0\left(\frac{11}{12}\right)^6 + \binom{6}{1}\left(\frac{1}{12}\right)^1\left(\frac{11}{12}\right)^5,$$

cioè la probabilità di avere 0 volte 10 su 6 lanci più la probabilità di avere 1 volta 10 su 6 lanci.

$$P\left(\overline{C}\right) = 1 \cdot 1 \cdot \frac{11^6}{12^6} + 6 \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{11^5}{12^5} = 17 \cdot \frac{11^5}{12^6} \simeq 0,917$$

Quindi $P(C) = 1 - P\left(\overline{C}\right) \simeq 1 - 0,917 \simeq 0,083$.

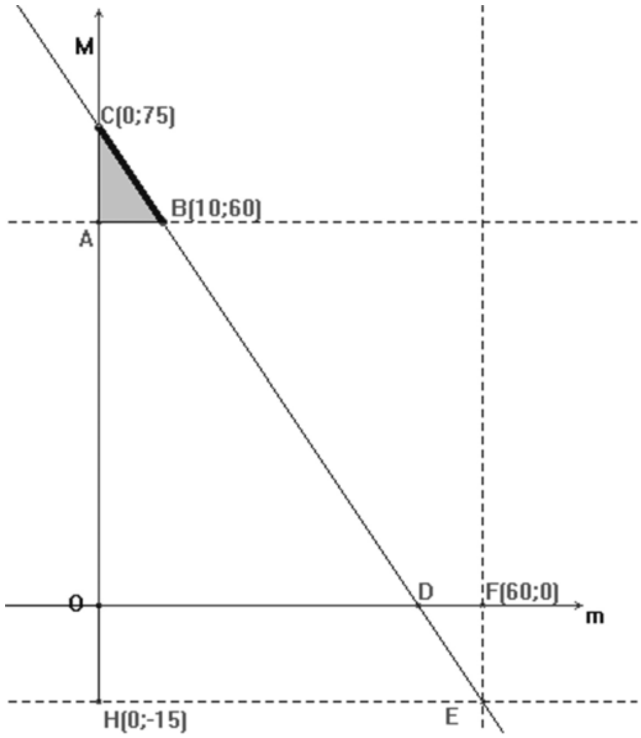
Quesito 10

Il 40% della popolazione di un paese ha 60 anni o più. Può l'età media della popolazione di quel Paese essere uguale a 30 anni? Si illustri il ragionamento seguito per dare la risposta.

Indicata con *m* l'età media degli individui del Paese che hanno meno di 60 anni (60% della popolazione) e con *M* l'età media degli individui che hanno 60 anni o più di 60 anni (40% della popolazione), l'età media della popolazione è data dalla media ponderata *0,6m+0,4M*.

Il quesito chiede se può l'età media della popolazione essere uguale a 30 anni; bisogna imporre allora *0,6m+0,4M=30*. Tenendo conto dei vincoli si ottiene il seguente sistema misto:

$$\begin{cases} 0,6m + 0,4M = 30 \\ 0 < m < 60 \\ M \geq 60 \end{cases}$$



Osserviamo la figura, dove sono rappresentati la retta *0,6m+0,4M=30* ed i vincoli, si vede che i vertici del campo di scelta sono *B(10;60)* e *C(0;75)*, questo vuol dire che tutti i valori del segmento BC sono soluzione del sistema.

Cioè $\begin{cases} 6m + 4M = 300 \rightarrow m = 50 - \frac{2}{3}M \\ 60 \leq M < 75 \\ 0 < m < 10 \end{cases}$

Dal punto di vista algebrico, la soluzione si ottiene in questo modo:

$$\begin{cases} m = 50 - \frac{2}{3}M \\ 0 < 50 - \frac{2}{3}M < 60 \\ M \geq 60 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m = 50 - \frac{2}{3}M \\ -15 < M < 75 \\ M \geq 60 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 0 < m < 10 \\ 60 \leq M < 75 \\ m = 50 - \frac{2}{3}M \end{cases}.$$

Quindi è possibile che l'età media della popolazione sia 30 anni e che il 40% degli individui abbiano 60 o più anni. Questo si verifica se l'età media degli individui con 60 anni o più è inferiore a 75 anni e l'età media degli individui con meno di sessanta anni è minore di 10 anni. Si tratta, evidentemente, di una situazione poco reale, anche se possibile dal punto di vista puramente matematico.