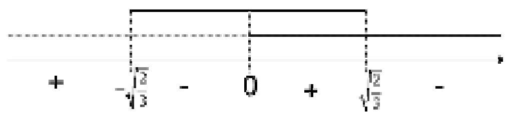
Esame di maturità scientifica, corso di ordinamento a. s. 2003-2004

Problema 1

Sia f la funzione definita da: f(x)=2x-3x^3

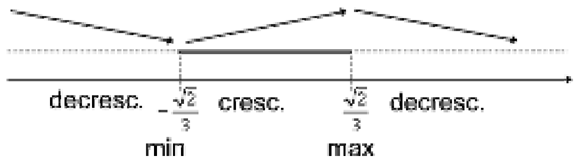
<u>Punto 1</u>
Disegnate il grafico G di f(x)=2x-x^3.



La funzione f(x)=2x-3x^3 è una funzione polinomiale (una cubica).
Dominino: $D_f \equiv \mathbb{R} \equiv]-\infty;+\infty[$
Simmetrie: Poiché f(-x)=-f(x) la funzione è dispari e il suo grafico è simmetrico rispetto all'origine.
Segno: //

Intersezione con gli assi: $A\left(-\sqrt{\frac{2}{3}};0\right)$, $O(0;0)$, $B\left(+\sqrt{\frac{2}{3}};0\right)$

Limiti: //
Asintoti: Il grafico della funzione non presenta asintoti.



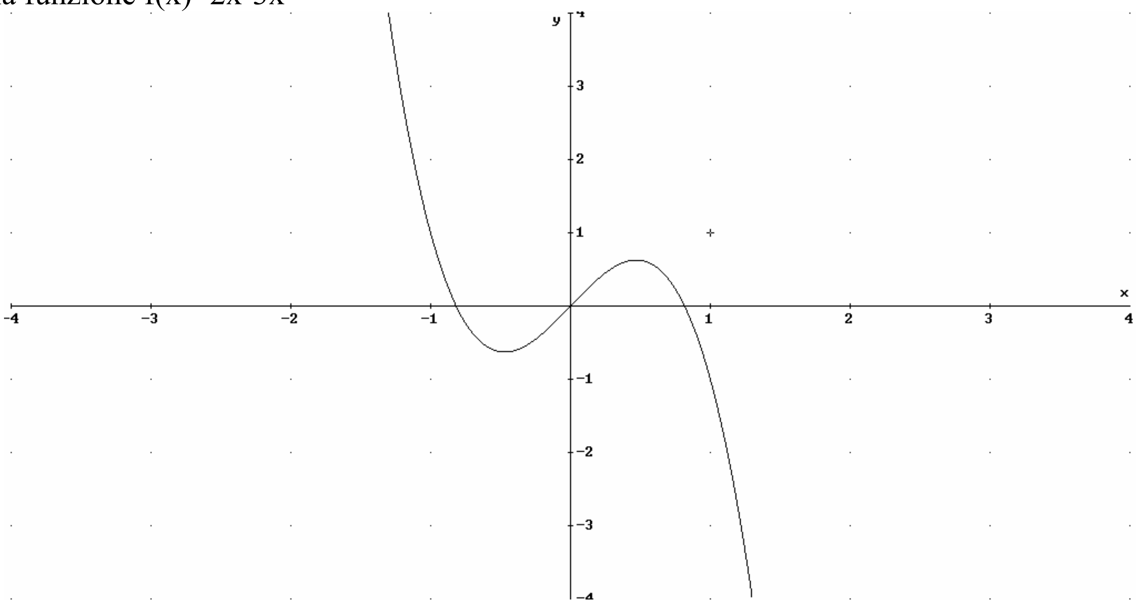
Derivata prima: $f'(x) = 2 - 9x^2$

$$f'(x) > 0 \Rightarrow 2 - 9x^2 > 0 \Rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{3} < x < \frac{\sqrt{2}}{3}$$

//
Derivata seconda: $f''(x) = -18x$

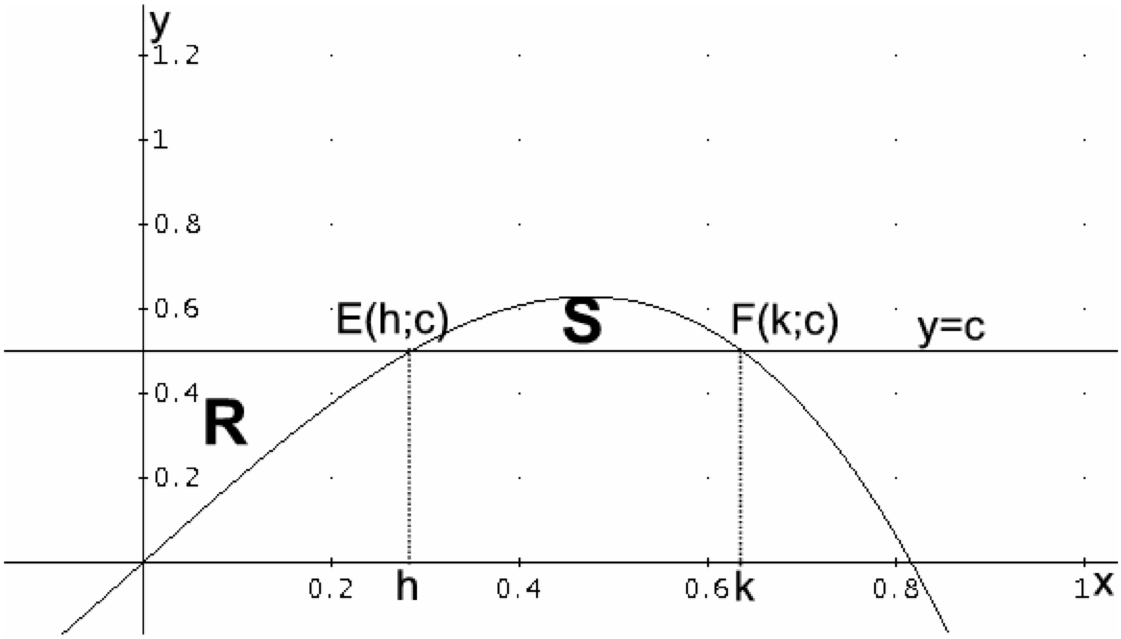
$f''(x) > 0 \Rightarrow x < 0$

//
Flesso(0;0)
Grafico G della funzione f(x)=2x-3x^3



Punto 2
Nel primo quadrante degli assi cartesiani, considerate la retta y =c che interseca G in due punti distinti e le regioni finite di piano R e S che essa delimita con G. Precisamente: R delimitata dall'asse y, da G e dalla retta y =c e S delimitata da G e dalla retta y = c.

La retta y=c, interseca il grafico della funzione in due punti E(h;c), F(k;c) del primo quadrante se $c \in \left]0; \frac{4\sqrt{2}}{9}\right[$. Gli estremi dell'intervallo sono stati esclusi perché per y=0 si annulla la superficie R e per $y = \frac{4\sqrt{2}}{9}$ si annulla la superficie S.



Punto 3
Determinate c in modo che R e S siano equivalenti e determinate le corrispondenti ascisse dei punti di intersezione di G con la retta y =c .

Indicate con E ed F le intersezioni di G con la retta y = c,

l'area della regione di piano R è data da: $\int_0^h [c - f(x)]dx = \int_0^h [c - 2x + 3x^3]dx$

l'area della regione di piano S è data da: $\int_h^k [f(x) - c]dx = \int_h^k [2x - 3x^3 - c]dx$

Uguagliando le due aree si ha : $\int_0^h [c - 2x + 3x^3]dx = \int_h^k [2x - 3x^3 - c]dx$

///

da cui

$$-2k + 3c = 0 \Rightarrow k = \frac{3}{2}c$$

///

$F\left(\frac{2}{3};\frac{4}{9}\right)$.

Il punto E si ottiene risolvendo il sistema $\begin{cases} y = 2x - 3x^3 \\ y = \frac{4}{9} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x^3 - 2x + \frac{4}{9} = 0 \\ y = \frac{4}{9} \end{cases}$

///

Il punto E ha coordinate $E\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{3};\frac{2}{3}\right)$

<u>Punto 4</u>

Determinate la funzione g il cui grafico è simmetrico di G rispetto alla retta y=4/9.

Le equazioni della simmetria assiale avente come asse la retta y=4/9 sono:

///

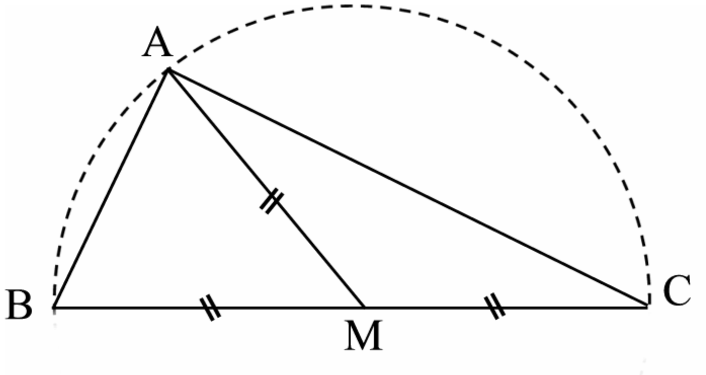
la funzione cercata è quindi $g(x) = 3x^3 - 2x + \frac{8}{9}$.

Problema 2

ABC **è un triangolo rettangolo di ipotenusa** ***BC*****.**

<u>Punto 1</u>

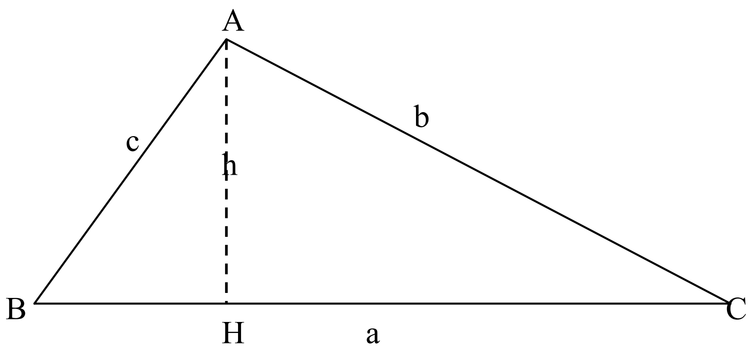
Dimostrate che la mediana relativa a ***BC*** **è congruente alla metà di** ***BC*****.**



Il triangolo rettangolo è inscrivibile nella semicirconferenza di diametro AB; la mediana AM è uguale al raggio della circonferenza, pertanto $AM \cong BM$.

<u>Punto 2</u>

Esprimete le misure dei cateti di ABC in funzione delle misure, supposte assegnate, dell'ipotenusa e dell'altezza ad essa relativa.



Siano:
a la misura dell'ipotenusa BC
b la misura del cateto AC
c la misura del cateto AB
h la misura dell'altezza AH relativa all'ipotenusa

//

$$\left.\begin{array}{l} Area = \dfrac{b\cdot c}{2} \\ Area = \dfrac{a\cdot h}{2} \end{array}\right) \Rightarrow b\cdot c = a\cdot h$$

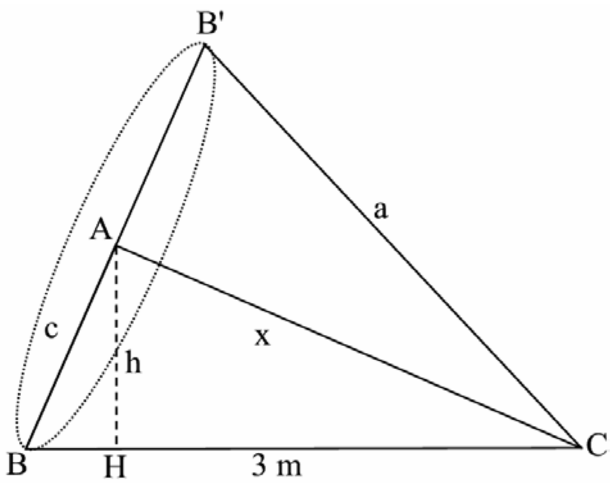
Dalle due equazioni trovate si ottiene il sistema simmetrico nelle incognite b, c che si può risolvere nel seguente modo:

//

scartando le soluzioni negative si ottiene: $\begin{cases} b = \dfrac{\sqrt{a^2+2ah}-\sqrt{a^2-2ah}}{2} \\ c = \dfrac{\sqrt{a^2+2ah}+\sqrt{a^2-2ah}}{2} \end{cases}$

<u>Punto 3</u>

Con $BC = \sqrt{3} metri$ **, determinate il cono K di volume massimo che si può ottenere dalla rotazione completa del triangolo attorno ad uno dei suoi cateti e la capacità in litri di K.**



Posto $\overline{AC} = x$ si ha $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2 \to \overline{AB}^2 = 3 - x^2$

Il volume del cono è dato da: $V = \frac{\pi}{3} AB^2 \cdot AC = \frac{\pi}{3}\left(3 - x^2\right) \cdot x = \frac{\pi}{3}\left(3x - x^3\right)$

//

Il volume massimo del cono si ha per x=1

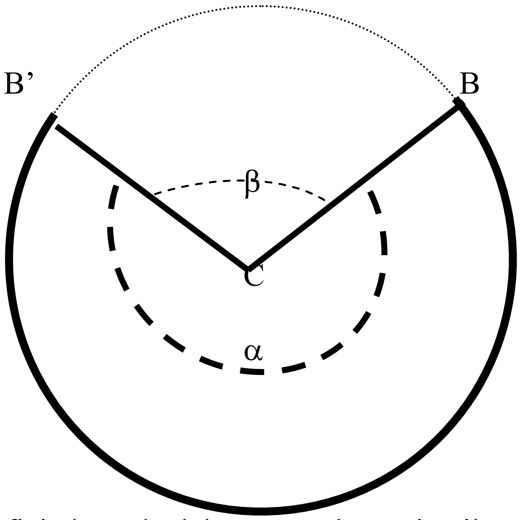
$V(1) = \frac{2\pi}{3} m^3$

Per esprimere il volume in litri si tiene conto che $1m^3 = \left(10dm\right)^3 = 1000dm^3 = 1000 litri$

la capacità è: $\frac{2000\pi}{3}\ litri \approx 2094,4\ litri$

__Punto 4__

Determinate la misura approssimata, in radianti ed in gradi sessagesimali, dell'angolo del settore circolare che risulta dallo sviluppo piano della superficie laterale del cono *K*.



Lo sviluppo piano della superficie laterale del cono ***K*** determina il settore circolare di raggio $BC = \sqrt{3}$ rappresentato in figura. La lunghezza dell'arco $\widehat{BB'} = 2\sqrt{2}\pi$;

la misura in radianti dell'angolo α è $\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\pi \cong 5,13\ rad$

la misura in radianti dell'angolo α è $\alpha^\circ = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} 180° \cong \left(293,94\right)^\circ$

Questionario

<u>Quesito 1</u>
Trovate due numeri reali a e b, a ≠ b, che hanno somma e prodotto uguali.

Indicando con s la somma e con p il prodotto dei due numeri reali a, b con $a \neq b$ si ottiene il seguente sistema:

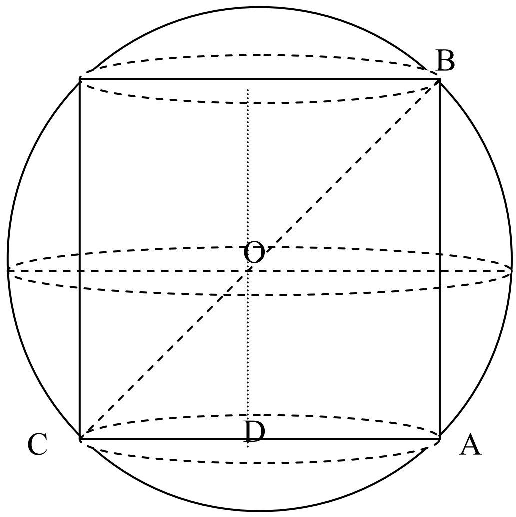
$$\begin{cases} a+b=s \\ a\cdot b=p \end{cases} \xrightarrow{s=p} \begin{cases} a+b=s \\ a\cdot b=s \end{cases}$$

//
affinché le soluzioni dell'equazione siano reali e distinte si deve avere:
$s^2-4s>0 \Rightarrow 0<s \quad \vee \quad s>4$

//
Quindi per qualsiasi valore s che soddisfi la condizione: $0<s \quad ; \quad s>4$
si può trovare una coppia di numeri reali a e b, a ≠ b, che hanno somma e prodotto uguali.

//
<u>Quesito 2</u>
Provate che la superficie totale di un cilindro equilatero sta alla superficie della sfera ad esso circoscritta come 3 sta a 4.

Indicato con:
S_c la superficie totale del cilindro
S la superficie della sfera
R (OB) il raggio della sfera circoscritta
r (DA) il raggio del cerchio di base del cilindro
h(AB) l'altezza del cilindro.
//
quindi: $\frac{S_c}{S}=\frac{6\pi r^2}{8\pi r^2}=\frac{3}{4}$



<u>Quesito 3</u>
Date un esempio di funzione f(x) con un massimo relativo in (1, 3) e un minimo relativo in (-1, 2).

La condizione di appartenenza al grafico della funzione del punto di massimo e del punto minimo sono: f(1)=3; f(-1)=2.
La condizione necessaria affinché il grafico di una funzione presenti un punto stazionario è che la derivata prima sia eguale a zero, cioè: f'(1) =0; f'(-1)=0.
Quindi ci sono quattro condizioni per poter trovare l'espressione della funzione. Supponendo che la funzione sia un polinomio di terzo grado (cubica) $y=ax^3+bx^2+cx+d$
basterà imporre le quattro condizioni suddette per trovare i quattro parametri (a, b, c, d), tenendo conto che: $y'=3ax^2+2bx+c$

$$\begin{cases} f(+1)=3 \Rightarrow +a+b+c+d=3 \\ f(-1)=2 \Rightarrow -a+b-c+d=2 \\ f'(+1)=0 \Rightarrow 3a+2b+c=0 \\ f'(-1)=0 \Rightarrow 3a-2b+c=0 \end{cases}$$

risolvendo il sistema trovato si ottiene:

//

Quesito 4

Dimostrate che l'equazione $e^x+3x=0$ ammette una e una sola soluzione reale.

La funzione $y=e^x+3x$ è definita e continua su tutto l'asse reale, pertanto è continua anche $\forall x \in X \equiv [-1;0]$ e risulta $f(-1)=e^{-1}+3(-1)=\frac{1-3}{e}<0 \quad ; \quad f(0)=e^0+3(0)=1>0$, per il teorema degli zeri la funzione f(x) si annullerà almeno una volta nell'intervallo $X_1 \equiv]-1;0[$.

Essendo inoltre derivabile $\forall x \in X_1 \equiv]-1;0[$ e $y'=e^x+3>0, \forall x \in \mathbb{R}$ la funzione è strettamente crescente e quindi si annullerà solo una volta .

Concludendo la soluzione dell'equazione data è unica e appartiene all'intervallo $X_1 \equiv]-1;0[$.

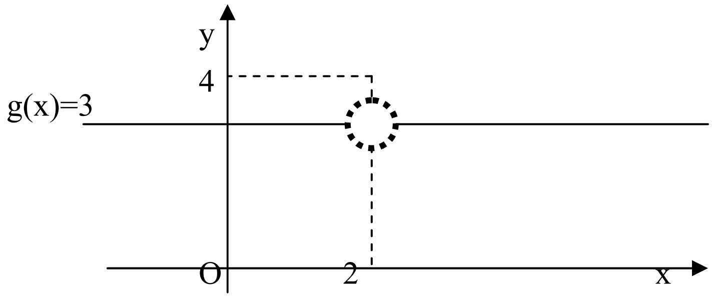
Quesito 5

Di una funzione g(x) non costante si sa che: $\lim_{x\to 2} g(x)=3 \quad e \quad g(2)=4$**.**

Trovate una espressione di g(x).

Dalle condizioni date risulta che la funzione g(x) ha un punto di discontinuità di terza specie.

Esistono infinite funzioni non costanti che soddisfano le condizioni date, esempi sono le seguenti funzioni:



//

Quesito 6

Verificate che le due funzioni $f(x)=3\cdot\log x \quad e \quad g(x)=\log(2x)^3$ **hanno la stessa derivata. Quale giustificazione ne date?**

Le due funzioni $f(x)=3\cdot\log x \quad e \quad g(x)=\log(2x)^3$ continue e derivabili in tutto il loro dominio $D \equiv]0;+\infty[$, hanno la stessa derivata prima infatti:

$$f'(x)=\frac{3}{x} \quad e \quad g'(x)=\frac{1}{(2x)^3}\cdot 3\cdot(2x)^2\cdot 2=\frac{3}{x}$$

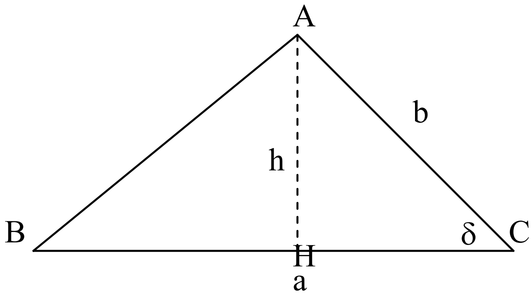
Ciò è dovuto alle proprietà dei logaritmi:

//

<u>Quesito 7</u>

Un triangolo ha due lati e l'angolo da essi compreso che misurano rispettivamente a, b e δ. Qual è il valore di δ che massimizza l'area del triangolo ?

Ponendo:



BC =a
AC =b
AH =h

considerando il triangolo rettangolo AHC,
si ha : h = b sen δ
e quindi l'area del triangolo ABC, in funzione dell'angolo δ, è data da:
//

Il valore massimo del seno di un angolo si ha per δ=90°, infatti sen 90°=1. Per questo valore l'area è $S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b$ e il triangolo è un triangolo rettangolo.

//

<u>Quesito 8</u>

La misura degli angoli viene fatta adottando una opportuna unità di misura. Le più comuni sono i gradi sessagesimali, i radianti, i gradi centesimali. Quali ne sono le definizioni?

//

<u>Quesito 9</u>

Calcolate $\int_0^1 arcsenx\, dx$ **.**

Si può calcolare l'integrale proposto direttamente applicando il metodo di integrazione per parti nel seguente modo:

$$x = sen\, t \rightarrow dx = \cos t \cdot dt$$
$$t = arcsen\, x$$
$$x = 0 \rightarrow t = 0$$
$$x = 1 \rightarrow t = \frac{\pi}{2}$$

si ha

$$\int_0^1 arcsenx\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \cdot \cos t \cdot dt \xrightarrow[\text{per parti}]{\text{integrando}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \cdot \cos t \cdot dt = \left[t \cdot sen\, t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} sen\, t \cdot dt = \left[t \cdot sen\, t + \cos t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1$$

<u>Quesito 10</u>

Considerate gli insiemi $A = \{1,2,3,4\}$ **e** $B = \{a,b,c\}$ **; quante sono le applicazioni (le funzioni) di A in B?**

//