Esame di maturità scientifica, corso sperimentale PNI a. s. 2003-2004

Problema 1

Sia γ la curva di equazione $y = ke^{-\lambda x^2}$ ove k e λ sono parametri positivi.

<u>Punto 1</u>
Si studi e si disegni γ;

Dominio: La funzione $f(x) = ke^{-\lambda x^2}$ con k e λ parametri positivi é definita $\forall x \in \mathbb{R}$

Simmetrie: siccome f(-x)=f(x) la funzione è pari (il grafico della funzione è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate).

Segno: $f(x) > 0 \Rightarrow ke^{-\lambda x^2} > 0 \xrightarrow[k>0]{essendo} e^{-\lambda x^2} > 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$

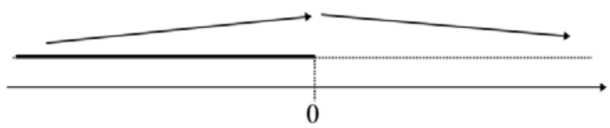
Intersezioni con gli assi: essendo $f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ la curva γ non interseca l'asse delle ascisse. Per x=0 si ha f(0)=k , cioè il grafico della funzione interseca l'asse delle ordinate nel punto M(0;k).

Limiti agli estremi dell'intervallo: $\lim_{x \to -\infty} ke^{-\lambda x^2} = 0$; $\lim_{x \to +\infty} ke^{-\lambda x^2} = 0$

La retta di equazione y=0 è un asintoto orizzontale a destra e a sinistra per il grafico della funzione. L'esistenza dell'asintoto orizzontale y=0 esclude l'esistenza degli asintoti obliqui.
Non esistono asintoti verticali.

Derivata prima: $y' = -2\lambda k x e^{-\lambda x^2}$

Segno della derivata prima



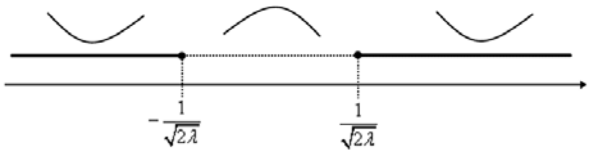
$$y' > 0 \Rightarrow -2\lambda k x e^{-\lambda x^2} > 0 \xrightarrow{\substack{\lambda>0 \\ k>0 \\ e^{-\lambda x^2}>0}} x < 0$$

Il punto M(0;k) è un punto di massimo assoluto per il grafico della funzione.

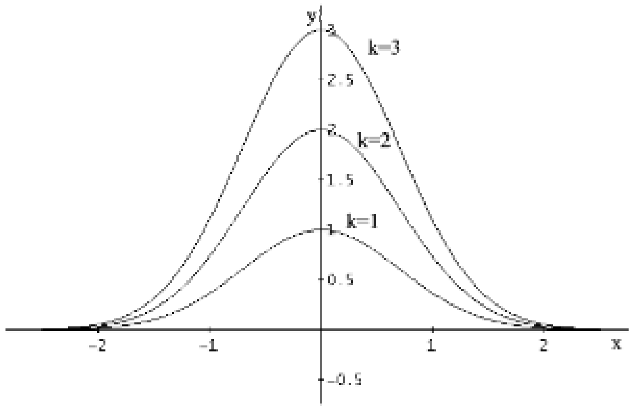
Derivata seconda: $y'' = -2\lambda k\left[e^{-\lambda x^2} - 2x^2\lambda e^{-\lambda x^2}\right] = 2\lambda ke^{-\lambda x^2}\left(2\lambda x^2 - 1\right)$

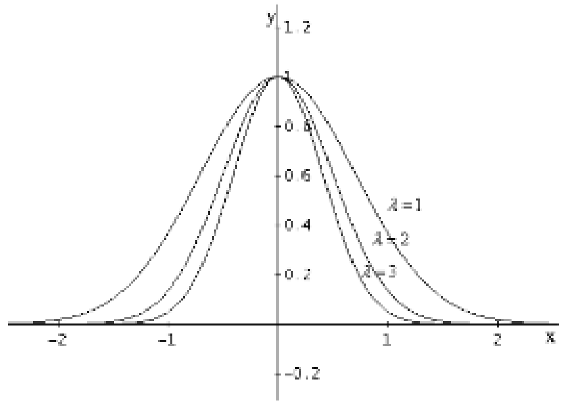
Segno della derivata seconda

$$y'' > 0 \Rightarrow 2\lambda k e^{-\lambda x^2}\left(2\lambda\, x^2 - 1\right) > 0 \xrightarrow{\substack{\lambda>0 \\ k>0 \\ e^{-\lambda x^2}>0}} \left(2\lambda\, x^2 - 1\right) > 0 \Rightarrow x < -\frac{1}{\sqrt{2\lambda}} \quad x > +\frac{1}{\sqrt{2\lambda}}$$



I punti $F_1\left(-\frac{1}{\sqrt{2\lambda}}; k \cdot e^{-\frac{1}{2}}\right)$ *e* $F_2\left(+\frac{1}{\sqrt{2\lambda}}; k \cdot e^{-\frac{1}{2}}\right)$ sono due punti di flesso per il grafico della funzione $y = ke^{-\lambda x^2}$.



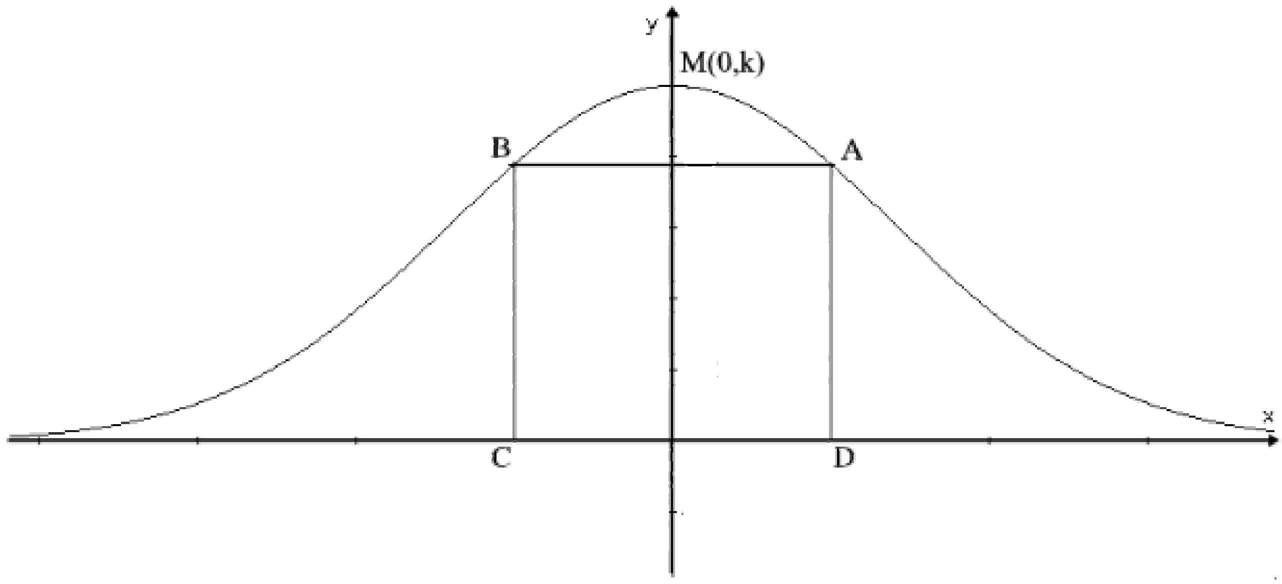


In questa figura λ è fisso e k varia. All'aumentare del valore di k aumenta il valore massimo della funzione.

In questa figura k è fisso e λ varia. All'aumentare del valore di λ diminuisce l'ascissa del punto di flesso: la forma a "campana " della curva diventa sempre più "stretta".

<u>Punto 2</u>

Si determini il rettangolo di area massima che ha un lato sull'asse x e i vertici del lato opposto su γ.



//

L'area del rettangolo ABCD è minima per x=0, massima per $x = +\frac{1}{\sqrt{2\lambda}}$

i vertici del rettangolo ABCD, in questo caso, sono:

//

<u>Punto 3</u>

Sapendo che $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$ e assumendo $\lambda = \frac{1}{2}$, si trovi il valore da attribuire a k affinché l'area compresa tra γ e l'asse x sia 1.

L’area compresa tra γ e l’asse x è data dall’integrale improprio:

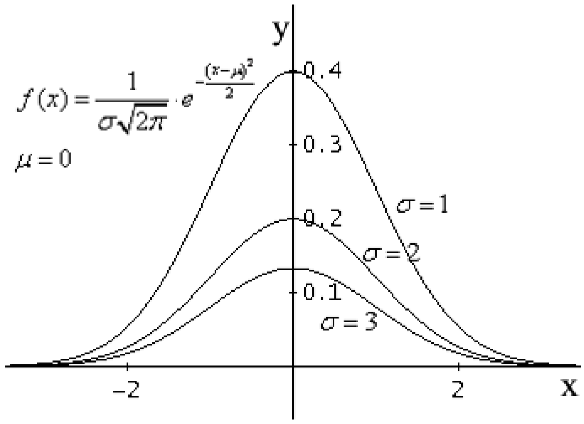
//

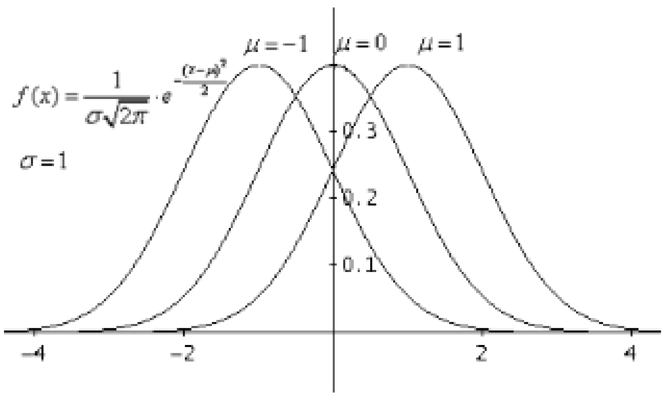
Imponendo I=1 ,si ottiene $k\sqrt{2\pi}=1 \rightarrow k=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

<u>Punto 4</u>

Per i valori di k e λ sopra attribuiti, γ è detta curva standard degli errori o delle probabilità o normale di Gauss (da Karl Friedrich Gauss, 1777-1855). Una media $\mu \neq 0$ e uno scarto quadratico medio $\sigma \neq 1$ come modificano l’equazione e il grafico?

//





All’aumentare di σ la curva si *allarga* e presenta una maggiore dispersione rispetto al valor medio μ. Il parametro μ (media) determina una traslazione della curva gaussiana.

Problema 2

Sia f la funzione così definita $f(x) = sen\frac{\pi}{a}x \cdot \cos\frac{\pi}{2b}x + x$ **con a e b numeri reali diversi da zero.**

Punto 1

Si dimostri che, comunque scelti a e b, esiste sempre un valore di x tale che $f(x) = \frac{a+b}{2}$**.**

Ricordiamo che:
se $f:[a;b] \to \mathbb{R}$ continua ([a,b] chiuso e limitato),
f assume massimo assoluto M e minimo assoluto m in [a,b] (*Teorema di Weierstrass*),
f assume tutti i valori compresi tra m ed M (*Teorema dei valori intermedi*).
Cioè una funzione f continua in un intervallo chiuso e limitato [a,b] ha come immagine un intervallo limitato e chiuso [m,M].
La funzione $f(x) = sen\frac{\pi}{a}x \cdot \cos\frac{\pi}{2b}x + x$, con a e b numeri reali diversi da zero, è definita e continua su tutto $\Re$ e quindi è definita e continua anche su [a;b]; inoltre f(a)=a e f(b)=b, per cui

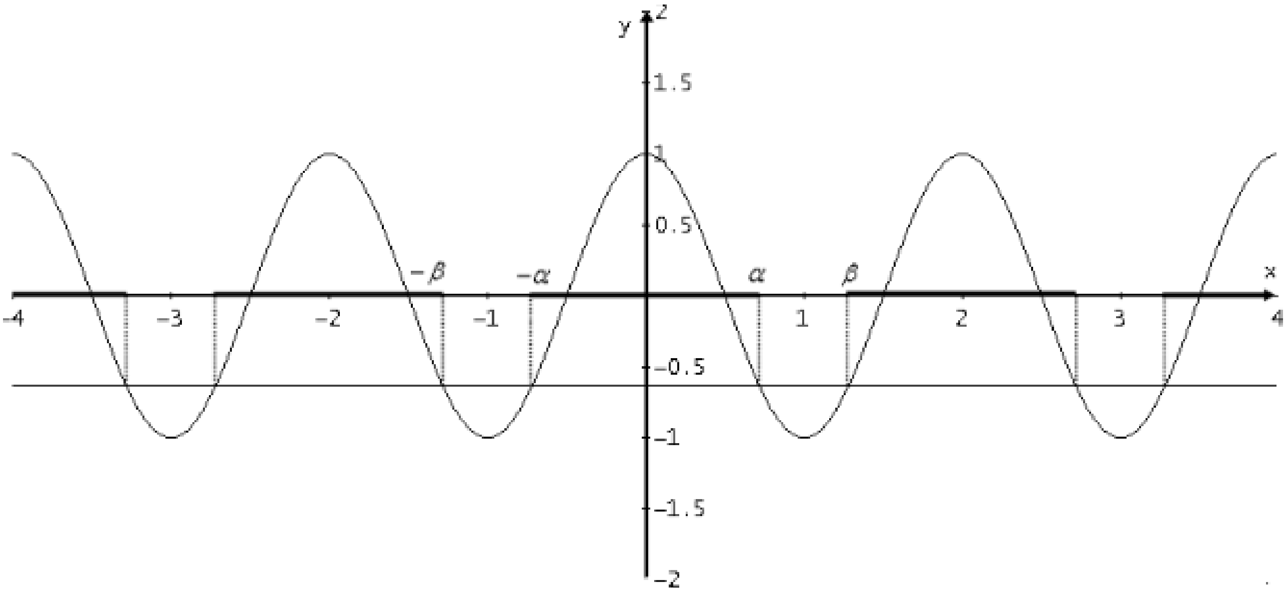
$$f(a) < \frac{f(a)+f(b)}{2} < f(b) \Rightarrow f(a) < \frac{a+b}{2} < f(b)$$

per il *Teorema dei valori intermedi* esiste certamente un valore di *x,* interno all'intervallo di estremi *a*, *b*, per il quale $f(x) = \frac{a+b}{2}$.

Punto 2

Si consideri la funzione g ottenuta dalla f ponendo a=2b=2. Si studi g e se ne tracci il grafico.

Ponendo a=2b=2 si ottiene: $g(x) = sen\frac{\pi}{2}x \cdot \cos\frac{\pi}{2}x + x$
dalla formula di duplicazione del seno si ha: ///////////////////////////////////////
g'(x)=$\frac{\pi \cdot \cos \pi x}{2} + 1 > 0 \Rightarrow \cos \pi x > -\frac{2}{\pi}$ la disequazione si può risolvere graficamente.



///////////////////////////////////////

Punto 3

Si consideri per x>0 il primo punto di massimo relativo e se ne fornisca una valutazione approssimata applicando un metodo iterativo a scelta.

Abbiamo visto che $g'(x)=\dfrac{\pi\cdot\cos\pi x}{2}+1$. Il primo punto di massimo relativo con ascissa positiva $x=\alpha$ soddisfa le condizioni $g'(\alpha)=0$; $\dfrac{1}{2}<\alpha<1$

Applicando il **metodo di bisezione** all'equazione $\dfrac{\pi\cdot\cos\pi x}{2}+1=0$ nell'intervallo $\left[\dfrac{1}{2};1\right]$ si ha:

x_1	x_2	$g'(x_1)$	$g'(x_2)$	α
0,5	1	+1	-0,5708…	0,5< α <1
0,75 (media tra 0,5 e 1)	1	-0,1107…	-0,5708...	0,5< α <0,75
0,625 (media tra 0,5 e 0,75)	0,75	+0,3989…	-0,1107…	0,625< α <0,75
0,6875 (media tra 0,625 e 0,75)	0,75	+0,1273…	-0,1107…	0,6875< α <0,75
0,71875 (media tra 0,6875 e 0,75)	0,75	+0,0035	-0,1107	0,71875< α <0,75

///////////////////////////////////////

Questionario

Quesito 1

La misura degli angoli viene fatta adottando una opportuna unità di misura. Le più comuni sono i gradi sessagesimali, i radianti, i gradi centesimali. Quali ne sono le definizioni?

///////////////////////////////////////

Quesito 2

Provate che la superficie totale di un cilindro equilatero sta alla superficie della sfera ad esso circoscritta come 3 sta a 4.

///////////////////////////////////////

Quesito 3

Un solido viene trasformato mediante una similitudine di rapporto 3. Come varia il suo volume? Come varia l'area della sua superficie?

Ricordiamo i seguenti teoremi sui solidi simili:
Le misure delle aree delle superfici di due solidi simili stanno tra loro come i quadrati delle misure di due elementi lineari omologhi.

Le misure dei volumi di due solidi simili stanno tra loro come i cubi delle misure di due elementi lineari omologhi

///////////////////////////////////////

Quesito 4

Considerate gli insiemi $A=\{1,2,3,4\}$ e $B=\{a,b,c\}$; quante sono le applicazioni (le funzioni) di A in B?

///////////////////////////////////////

Quesito 5

Dare un esempio di funzione g, non costante, tale che: $\lim_{x\to 2} g(x)=3$ e g(2)=4.

///////////////////////////////////////

Quesito 6

Date un esempio di funzione f(x) con un massimo relativo in (1, 3) e un minimo relativo in (-1, 2).

///////////////////////////////////////

Quesito 7

Tra i triangoli di base assegnata e di uguale area, dimostrare che quello isoscele ha perimetro minimo.

Si fissi un sistema di assi cartesiani ortogonali di centro O coincidente con un vertice della base di un triangolo OAB di base assegnata OA = b. Sia B il terzo vertice di coordinate (x,y) del triangolo. Tutti i triangoli di base b assegnata e area S assegnata si ottengono facendo variare il vertice B sulla retta $y = \frac{2S}{b}$, infatti $S = \frac{\overline{OA} \cdot \overline{BH}}{2} \Rightarrow S = \frac{b \cdot y}{2} \rightarrow y = \frac{2S}{b}$. Tra tutti questi triangoli dobbiamo trovare quello di perimetro minimo.

//////////////////////////////////////

La funzione p(x) ha un solo punto stazionario di ascissa $x = \frac{b}{2}$ ed essendo $\lim_{x \to \pm\infty} p(x) = +\infty$ questo punto è un punto di minimo. In conclusione, il perimetro del triangolo ABC è minimo per $x = \frac{b}{2}$.

Per questo valore si ha $\overline{AB} = \overline{BO} = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{2S}{b}\right)^2}$, cioè il triangolo ABC è isoscele.

Quesito 8

Trovate due numeri reali a e b, a ≠ b, che hanno somma e prodotto uguali.

//////////////////////////////////////

Quesito 9

Si dimostri che l'equazione $e^x + 3x = 0$ ammette una e una sola soluzione e se ne calcoli un valore approssimato utilizzando un metodo iterativo a scelta.

La prima parte di questo quesito è uguale al quesito 4 del tema assegnato per il corso di ordinamento. Per comodità si riportano le conclusioni alle quali si era pervenuti.

La funzione $y = e^x + 3x$ è definita e continua su tutto l'asse reale, essendo continua $\forall x \in X \equiv [-1;0]$

e $f(-1) = e^{-1} + 3(-1) = \frac{1-3}{e} < 0$; $f(0) = e^0 + 3(0) = 1 > 0$,

per il teorema degli zeri la funzione f(x) si annullerà almeno una volta nell'intervallo $X_1 \equiv]-1;0[$.

Essendo inoltre derivabile $\forall x \in X_1 \equiv]-1;0[$ e $y' = e^x + 3 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ la funzione è strettamente crescente e quindi si annullerà solo una volta .

La soluzione dell'equazione data è unica e appartiene all'intervallo $X_1 \equiv]-1;0[$.

Applicando il **metodo di bisezione** all'intervallo [-1;0] si ha:

x_1	x_2	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$x_1<x^*<x_2$
-1	0	-2,63…	+1	-1<x*< 0
-1	-0,5	-2,63…	-0,89…	-1<x*< -0,5
-0,5	-0,25	-0,89…	+0,02…	-0,5<x*< -0,25
………..	………..	………..	………..	………..
-0,257…	-0,25	+0,0007…	+0,0288…	-0,257<x*< -0,25
………..	………..	………..	………..	………..
-0,2578	-0,257	-0,00065…	+0,00237…	-0,2578<x*< -0,257

Si può assumere il valore -0,257 come approssimazione, esatta fino alla terza cifra decimale, della soluzione dell'equazione.

Applicando il **metodo delle tangenti** si ha

passo n	approssimazione x_n	$f(x_n) = e^{x_n} + 3x_n$	$f'(x_n) = e^{x_n} + 3$	$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
1	-1	-2,632120559	3,367879441	-0,21846
2	-0,21846	0,148362144	3,80375278	-0,25747
3	-0,25747	0,000603512	3,773006598	-0,25763

Questo metodo permette di raggiungere in tre passi l'esattezza alla terza cifra decimale.

Applichiamo infine il **metodo delle secanti** nell'intervallo [a,b], dove a=-1, b=0. Si ha:
$f(-1) < 0; f(0) > 0, f''(x) = e^x > 0\ \forall x$

passo n	approssimazione x_n	$f(x_n) = e^{x_n} + 3x_n$	$x_{n+1} = x_n - \frac{b - x_n}{f(b) - f(x_n)} \cdot f(x_n)$
1	-1	-2,632120559	-0,27532
2	-0,27532	-0,066635629	-0,25812
3	-0,25812	-0,001861962	-0,25764
4	-0,25764	-5,21338E-05	-0,25763

<u>Quesito 10</u>

Nel piano è data la seguente trasformazione:

$$x \to x\sqrt{3} - y$$
$$y \to x + y\sqrt{3}$$

Di quale trasformazione si tratta?

Ricordiamo che:
//////////////////////////////////////

Se ne deduce che è la composizione di una rotazione di 30° con un omotetia di rapporto k=2.