ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO CORSO DI ORDINAMENTO
anno 2002-2003
PROBLEMA 1

Soluzione

Punto a

Indicati rispettivamente con V ed S il volume e l'area totale di T e con r il raggio della sfera inscritta in T, trovare una relazione che leghi V, S ed r.

Il centro O della sfera inscritta coincide con il centro della sfera circoscritta; indichiamo con F il punto di tangenza tra la sfera inscritta e la faccia ABD del tetraedro T.

////////////////////////////

$$V = 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{S}{4} \cdot r = \frac{1}{3} Sr$$

////////////////////////////

Il volume del tetraedro è uguale a $V = \frac{S}{4} \cdot \frac{\overline{KD}}{3} = \frac{1}{3} \cdot r \cdot S \Rightarrow r = 3 \cdot \frac{V}{S}$

Punto b

Considerato il tetraedro regolare T' avente per vertici i centri delle facce di T, calcolare il rapporto fra le lunghezze degli spigoli di T e T' e il rapporto fra i volumi di T e T'.

DO è il raggio della sfera circoscritta a T.
OK è il raggio della sfera circoscritta a T', che è anche il raggio della sfera inscritta a T.

////////////////////////////

Per la similitudine di T e T', il rapporto tra i volumi sarà uguale al cubo del rapporto degli spigoli e quindi :

$\frac{V}{V'} = 27$

Punto c

Condotto il piano α, contenente la retta AB e perpendicolare alla retta CD nel punto E, e posto che uno spigolo di T sia lungo s, calcolare la distanza di E dalla retta AB.

////////////////////////////

quindi

$$\overline{HE} = \sqrt{\overline{EB}^2 - \overline{BH}^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}s\right)^2 - \left(\frac{s}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}s$$

Punto d

Considerata nel piano α la parabola p avente l'asse perpendicolare alla retta AB e passante per i punti A, B ed E, riferire questo piano ad un conveniente sistema di assi cartesiani ortogonali e trovare l'equazione di p.

Un conveniente sistema di riferimento ortogonale è quello che ha l'origine nel punto E e l'asse delle ordinate coincidente con la retta EH.

////////////////////////////

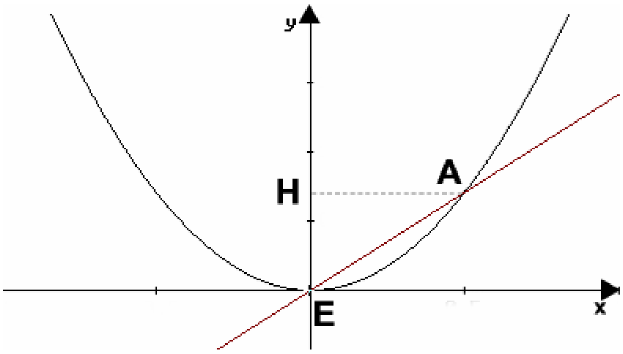
$$A\left(\frac{s}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}s\right);\ B\left(-\frac{s}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}s\right)$$

/////////////////////////////

Quindi l'equazione della parabola richiesta nel sistema di riferimento scelto è $y=\frac{2\sqrt{2}}{s}x^2$

Punto e

Determinare per quale valore di s la regione piana delimitata dalla parabola p e dalla retta EA ha area $\frac{\sqrt{2}}{3}cm^2$.



La retta EA ha equazione $y=\sqrt{2}x$. L'area richiesta è data dall'integrale

$$A=\int_0^{\frac{s}{2}}\sqrt{2}x-\frac{2\sqrt{2}}{s}x^2dx=\left[\sqrt{2}\frac{x^2}{2}-\frac{2\sqrt{2}}{3s}x^3\right]_0^{\frac{s}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{24}s^2$$

In alternativa si può applicare la regola di Archimede per il calcolo del segmento parabolico: *l'area di un segmento parabolico è uguale ai 2/3 di quella del rettangolo circoscritto.*

$$A=\frac{2}{3}\overline{AH}\cdot\overline{HE}-\frac{1}{2}\overline{AH}\cdot\overline{HE}=\frac{\sqrt{2}}{24}s^2$$

Imponendo che questo valore sia $\frac{\sqrt{2}}{3}cm^2$ si ottiene:

$$\frac{\sqrt{2}}{24}l^2=\frac{\sqrt{2}}{3}cm^2\Rightarrow l=2\sqrt{2}cm$$

PROBLEMA 2

<u>Quesito a</u>

Determinare il suo dominio di derivabilità.

La funzione $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+m+|m|}$ con m parametro reale, si può scrivere:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x+1}{x^2+2m} & per \quad m>0\\[2mm] \dfrac{2x+1}{x^2} & per \quad m\leq 0\end{cases}$$

////////////////////////////

$$Dom\ f'(x)=\begin{cases}\forall x\in\mathbb{R} & per \quad m>0\\ \forall x\in\mathbb{R}-\{0\} & per \quad m\leq 0\end{cases}$$

<u>Punto b</u>

Calcolare per quale valore di m la funzione ammette una derivata che risulti nulla per x = 1.

////////////////////////////

<u>Punto c</u>

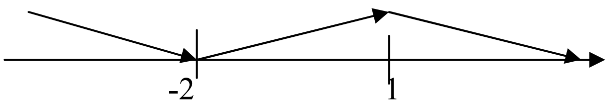
Studiare la funzione f(x) corrispondente al valore di m così trovato e disegnarne il grafico γ in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), dopo aver stabilito quanti sono esattamente i flessi di γ ed aver fornito una spiegazione esauriente di ciò.

La funzione da studiare diventa $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+2}$

////////////////////////////

Derivata prima: $f'(x)=\dfrac{-2x^2-2x+4}{\left(x^2+2\right)^2}$; $f'(x)=0\Rightarrow -2x^2-2x+4=0\rightarrow\{x_1=1\,,\,x_2=-2\}$

Monotonia: $f'(x)=\dfrac{-2x^2-2x+4}{\left(x^2+2\right)^2}$; $f'(x)>0\Rightarrow -2x^2-2x+4<0\rightarrow\{1<x<-2\}$;



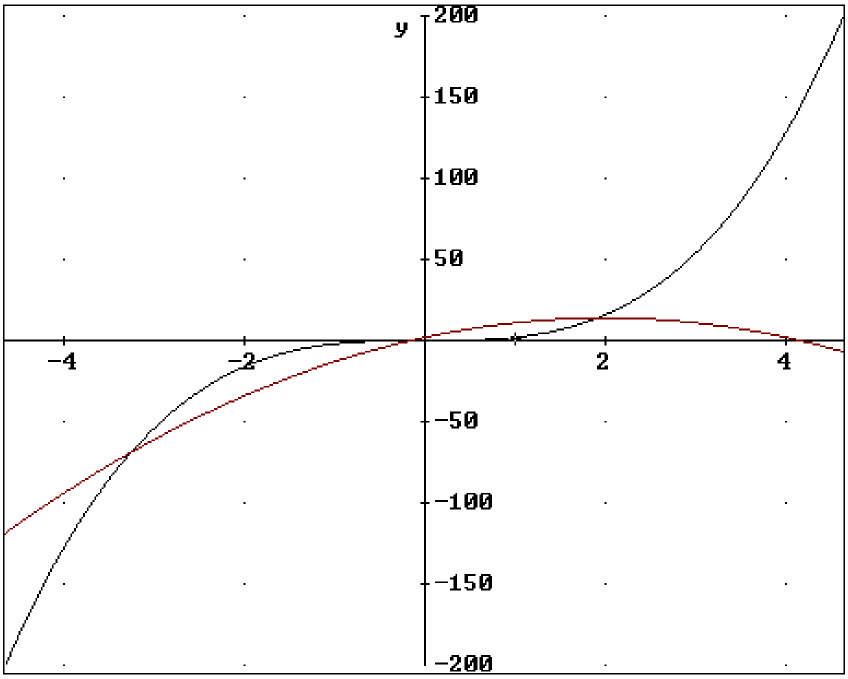
Massimi e minimi: $m\left(-2,-\dfrac{1}{2}\right)$ è minimo relativo, $M\left(1,1\right)$ è massimo relativo per la funzione.

Punti angolosi, cuspidi e flessi verticali: la derivata prima è definita e continua su tutto l'asse reale, pertanto non ci sono punti angolosi, cuspidi né flessi verticali.

Derivata seconda : $f''(x)=D\left[\dfrac{-2x^2-2x+4}{\left(x^2+2\right)^2}\right]=\dfrac{2\left(2x^3+3x^2-12x-2\right)}{\left(x^2+2\right)^3}$

$f''(x)=0 \Rightarrow 2x^3+3x^2-12x-2=0$ l'equazione di terzo grado ottenuta non si abbassa di grado con la regola di Ruffini, però si può risolvere col metodo grafico determinando le intersezioni tra la cubica e la parabola

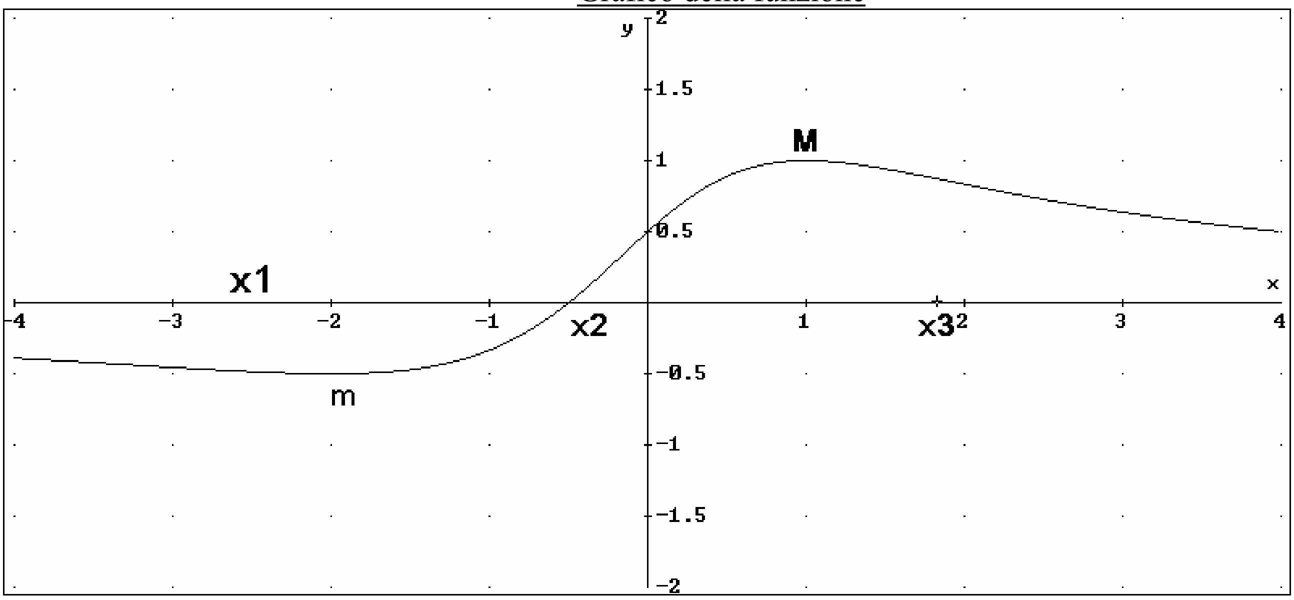
$$\begin{cases} y = 2x^3 \\ y = -3x^2+12x+2 \end{cases}$$



Concavità e flessi: Dal grafico si deduce che la funzione ha tre flessi le cui ascisse soddisfano le disuguaglianze $x_1<-2; -2<x_2<1; x_3>1$.

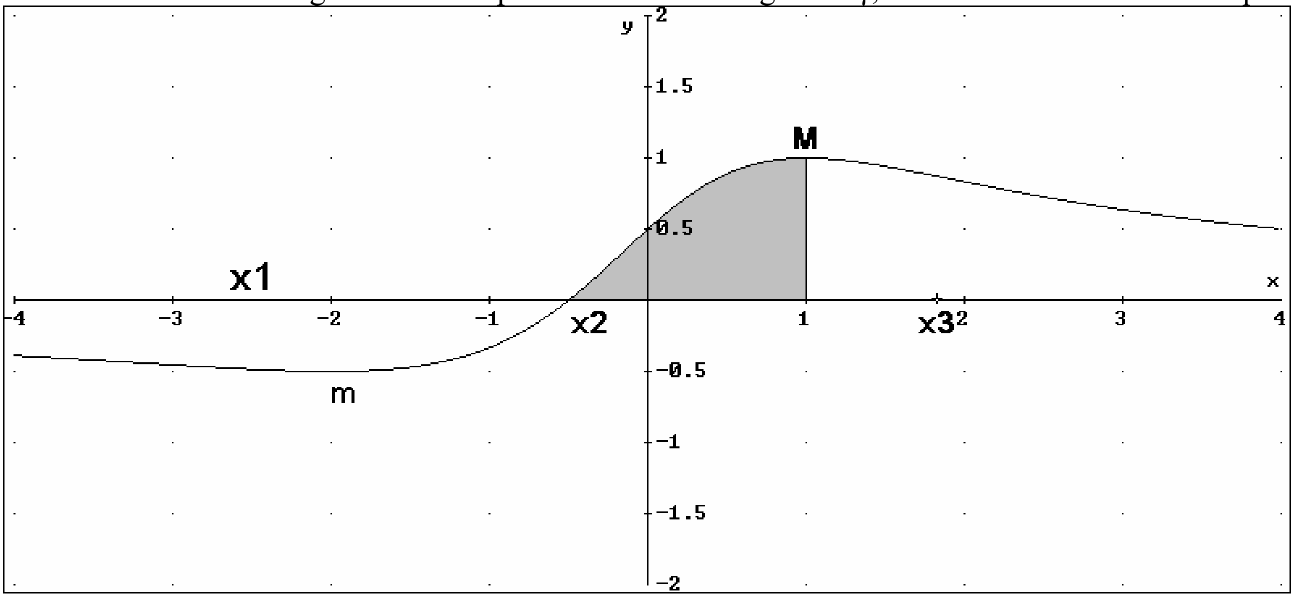
Lo si poteva dedurre senza effettuare lo studio grafico, dal fatto che la funzione è continua, ammette un massimo di ordinata positiva ed un minimo di ordinata negativa, tende all'asintoto orizzontale y=0.

Grafico della funzione



Punto d

Calcolare l’area della regione finita di piano delimitata dal grafico γ, dall’asse x e dalla retta di equazione $x = 1$.



L’area A della regione è data dal seguente integrale definito:

$$A = ////////////////// = \ln\frac{4}{3} + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(arctg\frac{\sqrt{2}}{2} + arctg\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$$

QUESTIONARIO

Quesito 1

Dopo aver fornito la definizione di “rette sghembe”, si consideri la seguente proposizione: «Comunque si prendano nello spazio tre rette x, y, z, due a due distinte, se x ed y sono sghembe e, così pure, se sono sghembe y e z allora anche x e z sono sghembe». Dire se è vera o falsa e fornire un’esauriente spiegazione della risposta.

Soluzione

Due rette si dicono *sghembe* se non sono complanari, cioè se non appartengono a uno stesso piano.

////////////////////////////

La proprietà transitiva *«Comunque si prendano nello spazio tre rette x, y, z, due a due distinte, se x ed y sono sghembe e, così pure, se sono sghembe y e z allora anche x e z sono sghembe»* **, è falsa**. Infatti, se prendiamo le rette x, y e z come in figura, le rette x e y sono sghembe; anche le rette y e z sono sghembe ma x e z non sono sghembe perché sono incidenti e quindi giacciono sullo stesso piano xz.

Quesito 2

Un piano interseca tutti gli spigoli laterali di una piramide quadrangolare regolare: descrivere le caratteristiche dei possibili quadrilateri sezione a seconda della posizione del piano rispetto alla piramide.

Soluzione

////////////////////////////

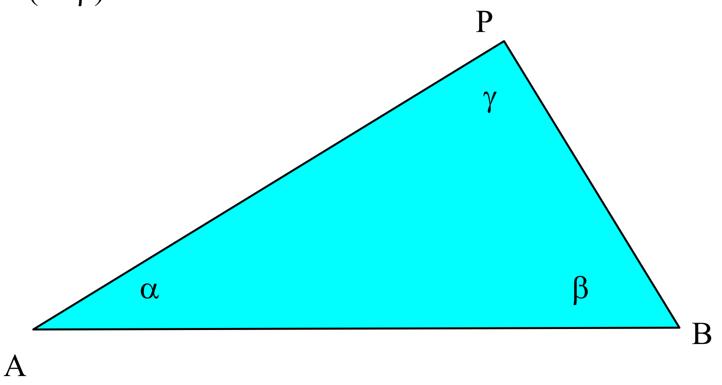
,

Quesito 3

Dal punto A, al quale è possibile accedere, è visibile il punto B, al quale però non si può accedere in alcun modo, così da impedire una misura diretta della distanza AB. Dal punto A si può però accedere al punto P, dal quale, oltre ad A, è visibile B in modo che, pur rimanendo impossibile misurare direttamente la distanza PB, è tuttavia possibile misurare la distanza AP. Disponendo degli strumenti di misura necessari e sapendo che P non è allineato con A e B, spiegare come si può utilizzare il teorema dei seni per calcolare la distanza AB.

Soluzione

Dal punto A si vedono i punti P e B e dal punto P si vedono A e B, quindi si possono misurare gli angoli α e γ corrispondenti ai vertici A e P del triangolo APB (vedi figura); conseguentemente si può ricavare la misura del terzo angolo: β=180°-(α+β).



Poiché la distanza AP è misurabile, possiamo applicare il teorema dei seni al triangolo APB :

$$\frac{\overline{AP}}{sen\,\beta}=\frac{\overline{AB}}{sen\,\gamma}\Rightarrow \overline{AB}=\frac{\overline{AP}\cdot sen\,\gamma}{sen\,\beta}$$

quindi

$$\overline{AB}=\frac{\overline{AP}\cdot sen\,\gamma}{sen\left[180^0-(\alpha+\beta)\right]}$$

Quesito 4

Il dominio della funzione $f(x)=\ln\left\{\sqrt{x+1}-(x-1)\right\}$ è l'insieme degli x reali tali che:

A) -1<x≤3; B) -1≤x<3; C) 0<x≤3; D) 0≤x<3.

Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire una esauriente spiegazione della scelta effettuata.

Soluzione

///////////////////////////

Quindi il dominio della funzione è $-1\le x<3$: la risposta corretta è la **B).**

Quesito 5

La funzione $2x^3-3x^2+2$ ha un solo zero reale, vale a dire che il suo grafico interseca una sola volta l'asse delle ascisse. Fornire un'esauriente dimostrazione di questo fatto e stabilire se lo zero della funzione è positivo o negativo.

Soluzione

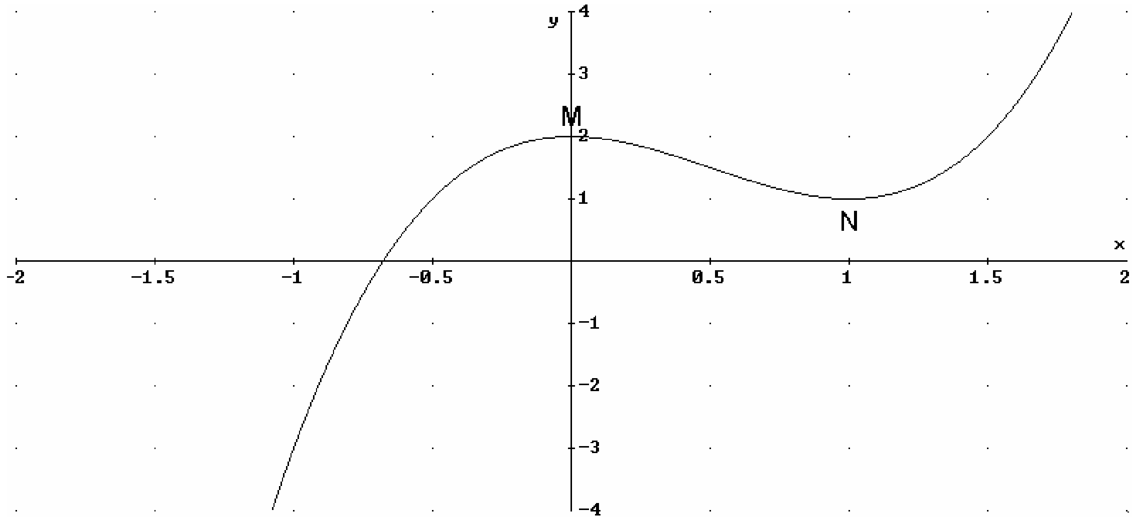
La funzione $f(x)=2x^3-3x^2+2$ è una cubica, per cui può avere al massimo tre zeri, cioè tre intersezioni con l'asse delle ascisse. Chiaramente la funzione è ovunque definita e continua e si ha:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(2x^3-3x^2+2\right)=+\infty \quad \lim_{x\to-\infty}\left(2x^3-3x^2+2\right)=-\infty$$

La derivata prima della funzione è $f'(x)=6x^2-6x$, si annulla per x=0 e per x=1.

Dallo studio del segno della derivata prima si deduce che la funzione presenta un massimo nel punto M(0;2) e un minimo nel punto N(1;1)

Siccome il valore massimo e quello minimo hanno lo stesso segno, la funzione ha un solo zero reale, poiché il valore del massimo è positivo, la funzione interseca l'asse x prima del massimo, quindi per x<0.



Quesito 6

La derivata della funzione f(x) = $\int_0^{x^2} e^{-t^2}\,dt$ è la funzione f '(x) = $2\,x\,e^{-x^4}$. Eseguire tutti i passaggi necessari a giustificare l'affermazione.

Soluzione

//////////////////////////////

Quesito 7

Considerati i primi n numeri naturali a partire da 1: 1, 2, 3, … , n-1, n , moltiplicarli combinandoli due a due in tutti i modi possibili. La somma dei prodotti ottenuti risulta uguale a:

A) $\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$; B) $\frac{1}{3}n(n^2-1)$; C) $\frac{1}{24}n(n+1)(n+2)(3n+1)$; D) $\frac{1}{24}n(n^2-1)(3n+2)$.

Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire una spiegazione esauriente della scelta operata.

Soluzione

Se si intende che vanno escluse le coppie di numeri ripetuti, per esempio 1x1, 2x2, ecc., la risposta corretta è la D. Infatti, si possono scartare subito le soluzioni A,B,C che non sono soddisfatte già per n = 2 oppure n=3.
Vediamo il caso n=3.
1x2+1x3+2x3=11. La proposta A dà 36. La proposta B dà 8. La proposta C dà 35/2. La proposta D dà 11.

Una dimostrazione può essere la seguente.
///////////////////////////
Quindi si ha

$$\sum_{i\neq j} ij = \frac{1}{2}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2 - \sum_{i=1}^{n} i^2\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{n^2(n+1)^2}{4} - \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\right] = \frac{1}{24}n(n^2+1)(3n+2)$$

Quesito 8

x ed y sono due numeri naturali dispari tali che x – y = 2. Il numero $x^3 - y^3$:

A. è divisibile per 2 e per 3.
B. è divisibile per 2 ma non per 3.
C. è divisibile per 3 ma non per 2.
D. non è divisibile né per 2 né per 3.

Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire una spiegazione esauriente della scelta operata.

Soluzione

///////////////////////////
che non è divisibile per 3. Quindi la **risposta corretta è la B)**

Quesito 9

Si consideri una data estrazione in una determinata Ruota del Lotto. Calcolare quante sono le possibili cinquine che contengono i numeri 1 e 90.

Soluzione

Si tratta di calcolare le possibili combinazioni di 3 oggetti scelti fra 88 (i 90 numeri dell'urna, tranne 1 e 90 .

$$C_{88,3} = \binom{88}{3} = \frac{88!}{(88-3)!\cdot 3!} = \frac{88\cdot 87\cdot 86}{3!} = 109.736$$

Quesito 10

Il valore dell'espressione $\log_2 3 \cdot \log_3 2$ è 1. Dire se questa affermazione è vera o falsa e fornire una esauriente spiegazione della risposta.

Soluzione

L'affermazione è vera infatti applicando la regola del cambiamento di base si ha:

$$\log_2 3 \cdot \log_3 2 = \log_2 3 \cdot \frac{\log_2 2}{\log_2 3} = 1 .$$