ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO CORSO SPERIMENTALE PNI
anno 2002-2003

PROBLEMA 1

Nel piano sono dati: il cerchio γ di diametro *OA = a*, la retta t tangente a γ in *A*, una retta r passante per *O*, il punto *B*, ulteriore intersezione di r con γ, il punto C intersezione di r con t.
La parallela per B a t e la perpendicolare per *C* a t s'intersecano in *P*. Al variare di r, *P* descrive il luogo geometrico *Γ* noto con il nome di ***versiera di Agnesi*** [da *Maria Gaetana Agnesi*, matematica milanese, (1718-1799)].

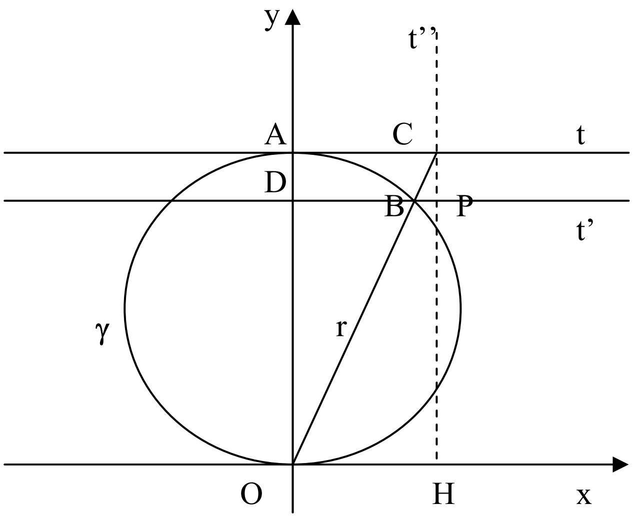
Punto 1

Si provi che valgono le seguenti proporzioni:

$$OD : DB = OA : DP$$
$$OC : DP = DP : BC$$

ove *D* è la proiezione ortogonale di *B* su *OA*;

Soluzione



//

Per il teorema della tangente e della secante, applicato alla tangente t e alla secante t', condotte dal punto esterno C alla circonferenza si ha:

$$OC : AC = AC : BC$$

Essendo AC = DP si ottiene

$$OC : DP = DP : BC$$

Punto 2

Si verifichi che, con una opportuna scelta del sistema di coordinate cartesiane ortogonali e monometriche *Oxy*, l'equazione cartesiana di Γ è: $y = \dfrac{a^3}{x^2 + a^2}$.

Soluzione

Scelto il sistema di riferimento cartesiano come nella figura precedente, il fascio di rette passante per l'origine degli assi O(0;0) ha equazione r: $y = mx$;

///////////////////////////////////////

L'equazione cartesiana del luogo Γ si ottiene eliminando il parametro *m* tra le equazioni parametriche del luogo geometrico, cioè:

$$\begin{cases} x = \dfrac{a}{m} \\ y = \dfrac{am^2}{1+m^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = \dfrac{a}{x} \\ y = \dfrac{\frac{a^3}{x^2}}{1+\frac{a^2}{x^2}} \end{cases} \Rightarrow y = \frac{a^3}{x^2+a^2}$$

Punto 3

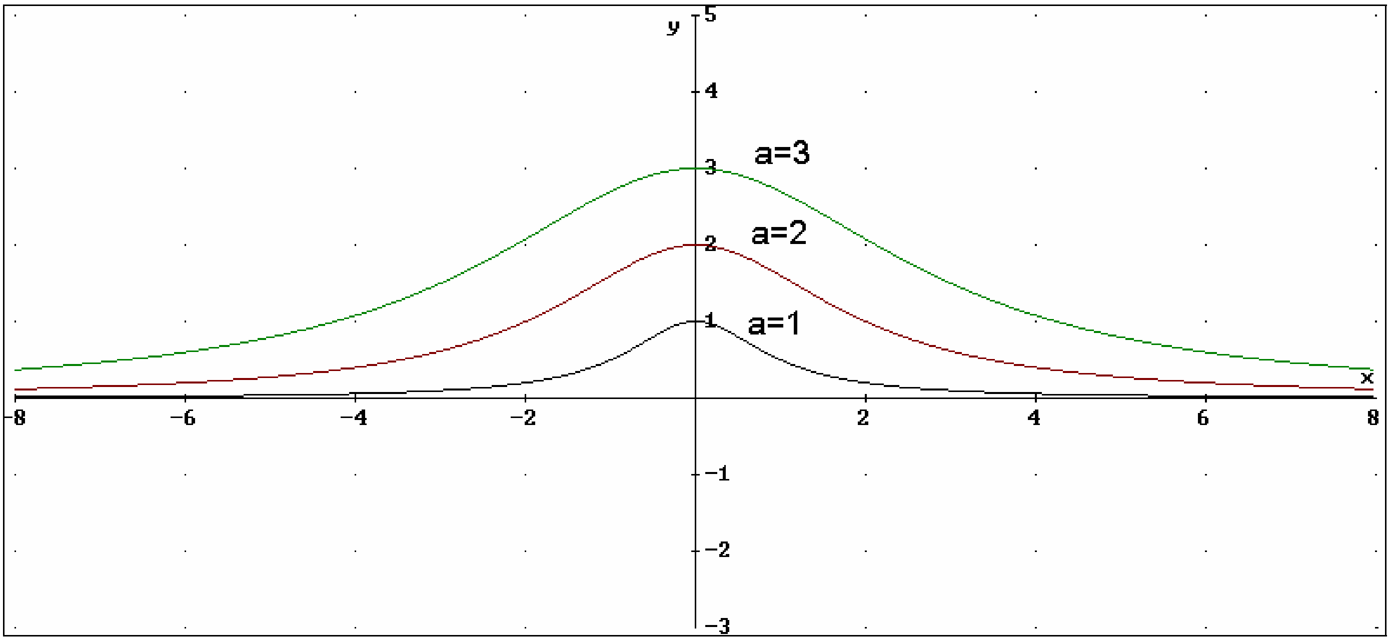
Si tracci il grafico di Γ e si provi che l'area compresa fra Γ e il suo asintoto è quattro volte quella del cerchio γ.

Soluzione

$$\Gamma : y = \frac{a^3}{x^2+a^2}$$

///////////////////////////////////////

Grafico della funzione $y = \dfrac{a^3}{x^2+a^2}$ per a =1, a=2 e a=3



Calcolo dell'area compresa fra Γ e il suo asintoto y=0

Per determinare l'area tra la curva Γ e il suo asintoto orizzontale y=0 bisogna calcolare il seguente integrale improprio: ///////////////////////////////////////

.

Questo valore è il quadruplo dell'area del cerchio γ di diametro a

$$A_{cerchio} = \pi \frac{a^2}{4}.$$

PROBLEMA 2

Sia $f(x)=a2^{x}+b2^{-x}+c$ con *a,b,c* numeri reali. Si determinino *a,b,c* in modo che:

1. la funzione *f* sia pari;
2. *f(0)=2;*
3. $\int_0^1 f(x)dx=\frac{3}{2\log 2}$.

Si studi la funzione *g* ottenuta sostituendo ad *a,b,c* i valori così determinati e se ne disegni il grafico G.

Si consideri la retta r di equazione *y=4* e si determinino, approssimativamente, le ascisse dei punti in cui essa interseca G, mettendo in atto un procedimento iterativo a scelta.

Si calcoli l'area della regione finita del piano racchiusa tra r e G.

Si calcoli $\int \frac{1}{g(x)}dx$.

Si determini la funzione *g'* il cui grafico è simmetrico di G rispetto alla retta r.

Punto 1

//

La funzione è pari se f(-*x*)=f(*x*), da ciò risulta:

$$f(-x)=f(x)\Rightarrow a\cdot 2^{-x}+b\cdot 2^{x}+c=a\cdot 2^{x}+b\cdot 2^{-x}+c\Rightarrow a\cdot\left(2^{-x}-2^{x}\right)=b\cdot\left(2^{-x}-2^{x}\right)\Rightarrow a=b.$$

2. f(0)=2.

Siccome $f(0)=a+b+c$, si ha

$$f(0)=2\Rightarrow a+b+c=2$$

3. $\int_0^1 f(x)dx=\frac{3}{2\log 2}$

$$\int_0^1 (a\cdot 2^{x}+b\cdot 2^{-x}+c)dx=\left[a\cdot\frac{2^{x}}{\log 2}-b\cdot\frac{2^{-x}}{\log 2}+cx\right]_0^1=$$

$$\frac{2a}{\log 2}-\frac{b}{2\cdot\log 2}+c-\frac{a}{\log 2}+\frac{b}{\log 2}=\frac{a}{\log 2}+\frac{b}{2\cdot\log 2}+c$$

$$\frac{a}{\log 2}+\frac{b}{2\cdot\log 2}+c=\frac{3}{2\cdot\log 2}\Rightarrow 2a+b+2c\cdot\log 2=3$$

Per trovare il valore dei tre parametri a, b, c si deve risolvere il sistema formato dalle tre relazioni trovate:

//

La funzione g(x) ottenuta sostituendo i valori trovati ha equazione:

$$g(x)=2^{x}+2^{-x}=2^{x}+\frac{1}{2^{x}}=\frac{2^{2x}+1}{2^{x}}.$$

Punto 2

Si studi la funzione g ottenuta sostituendo ad a,b,c i valori così determinati e se ne disegni il grafico G.

Studio della funzione $g(x) = \dfrac{2^{2x}+1}{2^x}$

DOMINIO: $\Re$ cioè l'asse reale.
INTERSEZIONE CON GLI ASSI: A(0,2) è l'unico punto di intersezione con l'asse delle ordinate e non ci sono intersezioni con l'asse delle ascisse.
SIMMETRIE: La funzione è pari [f(x)=f(-x)], cioè è simmetrica rispetto all'asse delle y.
SEGNO: $f(x)>0\ \forall x \in \Re$, cioè la funzione è sempre positiva.
COMPORTAMENTO AGLI ESTREMI DEL DOMINIO:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2^{2x}+1}{2^x} = \lim_{x\to\pm\infty}\left(2^x + \frac{1}{2^x}\right) = +\infty$$

quindi il grafico della funzione non presenta asintoti orizzontali.
ASINTOTI OBLIQUI:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2^x+2^{-x}}{x} \overset{\substack{Teorema\ di \\ De\ l'Hospital}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(2^x-2^{-x}\right)\cdot \log 2}{1} = +\infty$$

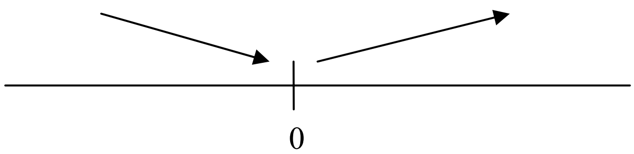
pertanto il grafico della funzione non presenta asintoti obliqui.
ASINTOTI VERTICALI
La funzione non ha asintoti verticali perché è continua in tutto $\Re$.

DERIVATA PRIMA: $g'(x) = \left(\dfrac{2^{2x}-1}{2^x}\right)\cdot \log 2$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow \left(\frac{2^{2x}-1}{2^x}\right)\cdot \log 2 = 0 \Rightarrow 2^{2x} = 1 \Rightarrow x = 0$$

MONOTONIA, MASSIMI E MINIMI:

$$\begin{cases} g'(x) > 0 \Rightarrow x > 0 \\ g'(x) = 0 \Rightarrow x = 0 \\ g'(x) < 0 \Rightarrow x < 0 \end{cases}$$



Il punto di ascissa x=0 è punto di minimo relativo proprio, nonché di minimo assoluto e si ha f(0)=2. Cioè il grafico della funzione presenta un minimo assoluto nel punto N(0;2).
DERIVATA SECONDA : La derivata seconda della funzione è

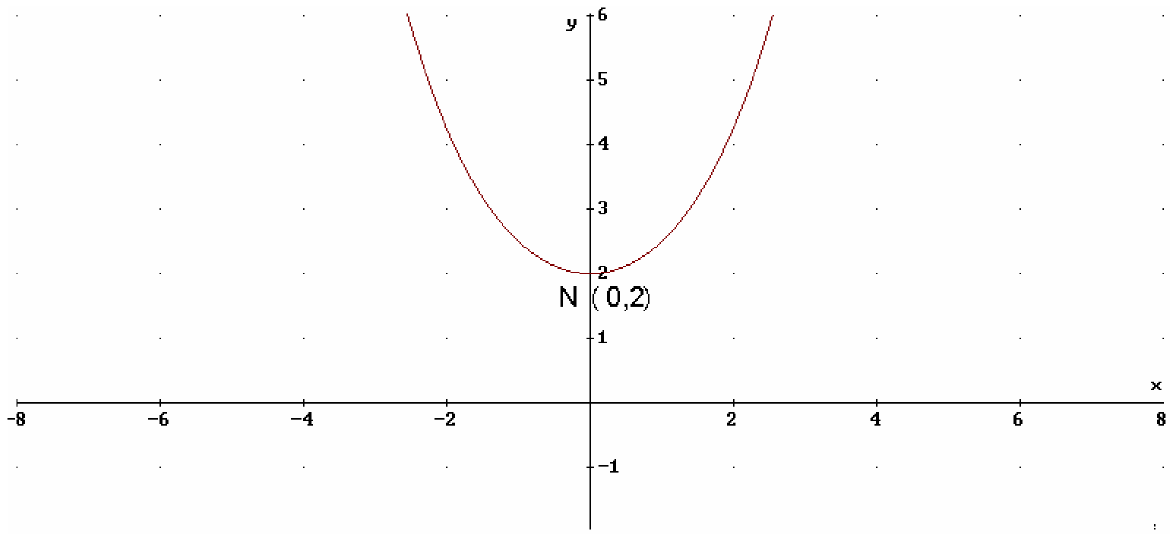
$$g''(x) = \left(\frac{2^{2x}+1}{2^x}\right)\cdot \log^2 2$$

CONCAVITÀ E FLESSI:

$$g''(x) > 0 \Rightarrow \left(\frac{2^{2x}+1}{2^x}\right)\cdot \log^2 2 > 0 \Rightarrow \forall x \in R$$

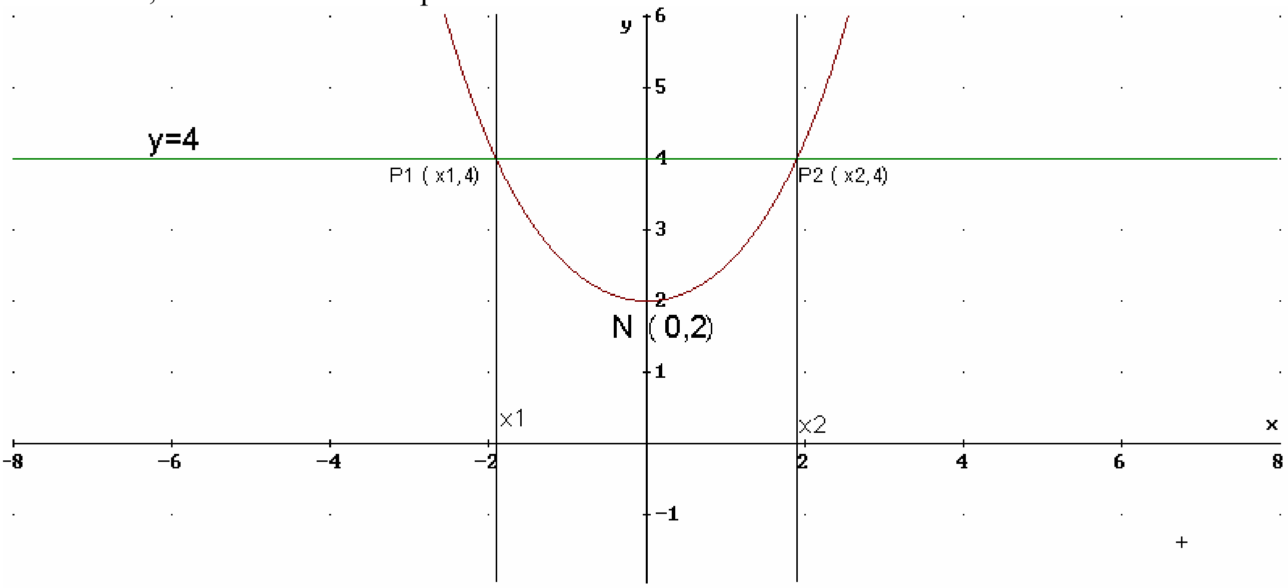
Il grafico della funzione non presenta flessi e volge la concavità verso l'alto.

Grafico della funzione $g(x) = \dfrac{2^{2x}+1}{2^x}$



Punto 3

Si consideri la retta r di equazione y=4 e si determinino, approssimativamente, le ascisse dei punti in cui essa interseca G, mettendo in atto un procedimento iterativo a scelta.



Come si vede dalla figura, la curva e la retta hanno due punti in comune disposti simmetricamente rispetto all'asse delle ordinate.

Per determinare le intersezioni si deve risolvere il sistema:

$$\begin{cases} y = \dfrac{2^{2x}+1}{2^x} \\ y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{2^{2x}+1}{2^x} = 4 \\ y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^{2x} - 4 \cdot 2^x + 1 = 0 \\ y = 4 \end{cases}$$

//

Centro intervallo	Estr. Inf. Intervallo	Estr. Sup. Intervallo	Valore di f(x) nel centro
1	1	2	-3
1,5	3/2	2	-2,31371
1,75	7/4	2	-1,14063
1,875	15/8	2	-0,21772

1,9375	….	….	0,350412
1,90625	….	….	0,056676
1,890625	….	….	-0,08288
1,898438	….	….	-0,0137
1,902344	**243/128**	**487/256**	**0,021339**

//

Punto 4
Si calcoli l'area della regione finita del piano racchiusa tra r e G

$$g(x) = 2^x + 2^{-x} = 2^x + \frac{1}{2^x} = \frac{2^{2x}+1}{2^x}$$

r: y=4,
i punti di intersezione sono già stati calcolati e hanno ascissa $x_1 = \log_2\left(2-\sqrt{3}\right), x_2 = \log_2\left(2+\sqrt{3}\right)$.

Tenendo conto della simmetria della regione piana, il valore dell'area richiesta è dato dal seguente integrale definito

//

Punto 5
Si calcoli $\int \frac{1}{g(x)} dx$

$$\int \frac{dx}{g(x)} = \int \frac{2^x}{1+2^{2x}} = \int \frac{2^x dx}{1+(2^x)^2} = \frac{1}{\log 2}\int \frac{2^x \cdot \log 2}{1+(2^x)^2} dx = \frac{1}{\log 2} \cdot arctg(2^x) + c \ .$$

Punto 6
Si determini la funzione g' il cui grafico è simmetrico di G rispetto alla retta r.

Per determinare la funzione g' si devono usare le equazioni della simmetria assiale, avente per asse la retta r : y=4:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = 8 - y \end{cases}$$

//

QUESTIONARIO

Quesito 1

1. *Quante partite di calcio della serie A vengono disputate complessivamente (andata e ritorno) nel campionato italiano a 18 squadre?*

Soluzione

Le partite di calcio disputate nei due gironi (andata e ritorno) sono tante quante sono le disposizioni di 2 oggetti distinti scelti tra 18 (le singole squadre); ovvero le disposizioni semplici di 18 elementi distinti di classe 2, cioè:

$$D_{18,2} = 18 \cdot 17 = 306 .$$

Si poteva giungere allo stesso risultato ragionando nel seguente modo: siccome ogni squadra deve incontrare tutte le altre e le squadre sono 18, nel girone d'andata saranno necessarie 17 giornate. Tenendo conto che in ogni giornata si disputano 9 partite, le partite disputate nel girone d'andata saranno 9·17= 153. Anche le partite del girono di ritorno saranno 153, per cui in totale le partite sono 306.

Quesito 2

2. Tre scatole A, B e C contengono lampade prodotte da una certa fabbrica di cui alcune difettose.
A contiene 2000 lampade con il 5% di esse difettose, B ne contiene 500 con il 20% difettose e C ne contiene 1000 con il 10% difettose.
Si sceglie una scatola a caso e si estrae a caso una lampada. Quale è la probabilità che essa sia difettosa?

Soluzione

Considerando gli eventi A, B, C, E

A =”*è estratta una lampada difettosa dalla scatola A*”,
B =”*è estratta una lampada difettosa dalla scatola B*”,
C =” *è estratta una lampada difettosa dalla scatola C*”,
E =” *è estratta una lampada difettosa* ”.

//

In base al teorema delle probabilità totali, la probabilità che la lampada sia difettosa è :

$$P(E) = P\left(E/A\right)\cdot P(A) + P\left(E/B\right)\cdot P(B) + P\left(E/C\right)\cdot P(C)$$

quindi

$$P(E) = \frac{1}{20}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{3} = \frac{7}{60} \cong 0.1167$$

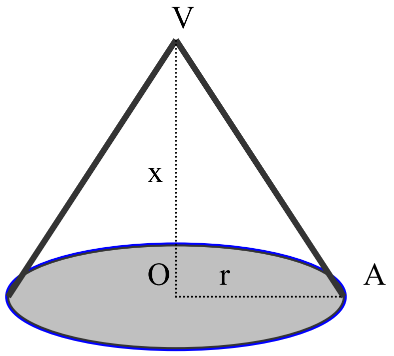
Osserva che il numero delle lampade contenute nelle singole scatole è irrilevante per la risoluzione del problema.

Quesito 3

3. *Quale è la capacità massima, espressa in centilitri, di un cono di apotema 2 dm?*

Soluzione

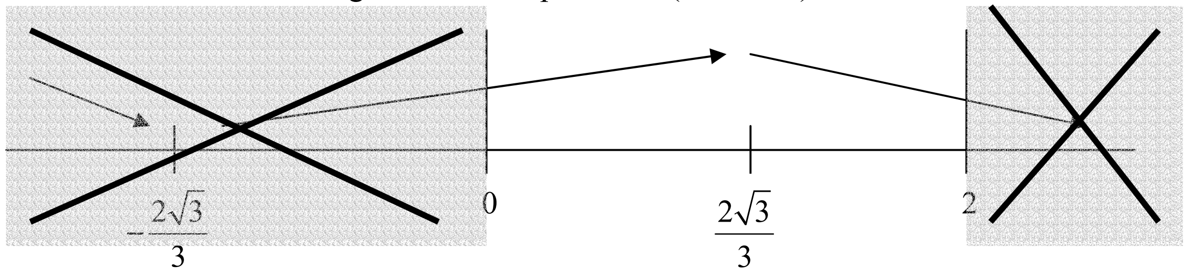
Sia $\overline{VA} = 2\ dm$ l’apotema del cono (vedi figura)



Indicata con x la misura dell’altezza VO e con r la misura del raggio di base OA, si ha:

//

Tenendo conto dei vincoli geometrici del problema ($0 \le x \le 2$) si ha:



La funzione V(x), definita nell'intervallo [0,2] presenta due punti di minimo assoluto M(0;0) e N(2;0).

///////////////////////////////////////

Il volume massimo corrispondente all'altezza massima $\overline{VO} = \frac{2\sqrt{3}}{3} dm$ risulta

$$V_{Max} = \frac{16\pi\sqrt{3}}{27} dm^3$$

Siccome 1 dm^3 equivale a 1 litro, cioè a cento centilitri (*cl*), il valore della capacità massima del cono espresso in centilitri è

$$V_{Max} = \frac{16\pi\sqrt{3}}{27} dm^3 = \frac{1600\pi\sqrt{3}}{27} cl \approx 322 cl$$

Quesito 4

4. *Dare un esempio di polinomio P(x) il cui grafico tagli la retta y=2 quattro volte.*

Soluzione

Vediamo alcuni esempi:

///////////////////////////////////////

Quesito 5

5. Dimostrare, usando il teorema di Rolle [da *Michel Rolle*, matematico francese, (1652-1719)], che se l'equazione:

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots\ldots\ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

ammette radici reali, allora fra due di esse giace almeno una radice dell'equazione:

$$nx^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \ldots\ldots\ldots + a_1 = 0$$

Soluzione

Teorema di Rolle

Data una funzione reale di variabile reale y = f(x), definita nell'intervallo chiuso e limitato [a, b], se la funzione soddisfa le ipotesi :

1. è continua in [a, b]

2. è derivabile in (a, b)

3. f(a)=f(b)

segue la tesi:

esiste un numero reale c appartenente all'intervallo(a,b) tale che f'(c)=0.

La funzione polinomiale al primo membro dell'uguaglianza è definita sull'asse reale, è continua ed ammette derivata di qualsiasi ordine.

La funzione $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots\ldots\ldots + a_1 x + a_0$

definita sull'asse reale, continua e derivabile, ha come derivata

$$f'(x) = nx^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \ldots\ldots\ldots + a_1$$

che è uguale al primo membro della seconda equazione assegnata nel testo del quesito.

Se x_1, x_2 sono due radici della funzione $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots\ldots\ldots + a_1 x + a_0$ cioè se

$$f(x_1)=x_1^n+a_{n-1}x_1^{n-1}+.........+a_1x_1+a_0=0;\ f(x_2)=x_2^n+a_{n-1}x_2^{n-1}+.........+a_1x_2+a_0=0$$

la funzione nell'intervallo [x_1, x_2] verifica le ipotesi del teorema di Rolle e quindi esiste almeno un punto c interno all'intervallo in cui si annulla la derivata prima, $f'(c)=0$; quindi

$$f'(c)=0 \Rightarrow c^n+a_{n-1}c^{n-1}+.........+a_1c+a_0=0 \quad con \quad c\in\left[x_{1;}x_2\right].$$

Quesito 6

6. Si vuole che l'equazione $x^3+bx-7=0$ abbia tre radici reali. Qual è un possibile valore di *b*?

//

Quesito 7

7. Verificare l'uguaglianza

$$\pi=4\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx$$

e utilizzarla per calcolare un'approssimazione di π, applicando un metodo di integrazione numerica.

<u>Soluzione</u>

$$\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\left[\text{arctg x}\right]_0^1=\text{arctg}\,1\text{-arctg}\,0=\frac{\pi}{4}$$

quindi

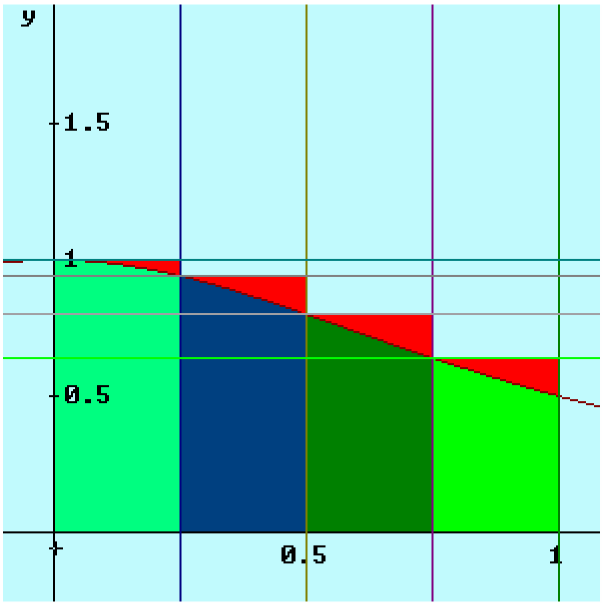
$$4\cdot\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\pi\,.$$

Per calcolare un'approssimazione di π, applichiamo alcuni dei metodi di integrazione numerica alla funzione $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$.

- *Metodo dei rettangoli.*

$$\int_a^b f(x)dx\simeq\frac{b-a}{n}\left[f\left(x_0\right)+f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)+...+f\left(x_{n-1}\right)\right]$$

Si divida l'intervallo [0;1] in 4 parti uguali, si ottiene un'approssimazione per eccesso.



Con la formula dei rettangoli si ottiene:

Aumentando il numero degli intervalli si ottiene un'approssimazione migliore (vedi tabella seguente).

- *Metodo dei trapezi.*

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \frac{b-a}{2n}\left[f(x_0)+f(x_n)+2\cdot\left[f(x_1)+\ldots+f(x_{n-1})\right]\right]$$

Dividendo [0;1] in 4 parti uguali si ottiene una approssimazione per difetto.

$$\pi = 4\cdot\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = 4\cdot\frac{(1-0)}{8}\cdot\left[\frac{1}{1+0^2}+\frac{1}{1+1^2}+\frac{2}{1+\left(\frac{1}{4}\right)^2}+\frac{2}{1+\left(\frac{2}{4}\right)^2}+\frac{2}{1+\left(\frac{3}{4}\right)^2}\right] \simeq 3{,}1312$$

Quesito 8

8. Dare un esempio di solido il cui volume è dato da $\int_0^1 \pi x^3 dx$.

Quesito 9

9. Di una funzione f(x) si sa che ha derivata seconda uguale a *senx* e che $f'(0)=1$.

Quanto vale $f\left(\frac{\pi}{2}\right)-f(0)$?

Soluzione

Possiamo scrivere le prime due condizioni date dal testo nel seguente modo:

$$\begin{cases} y'' = \operatorname{sen} x \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

si deve risolvere l'equazione differenziale y''= senx.

Integrando si ottiene:

$$y' = \int sen\ x\ dx + c_1 \Rightarrow y' = -\cos x + c_1$$

Imponendo la condizione $f'(0)=1$ si determina il valore della costante c_1.

//

Quesito 10

10. Verificare che l'equazione $x^3 - 3x + 1 = 0$ ammette tre radici reali. Di una di esse, quella compresa tra 0 e 1, se ne calcoli un'approssimazione applicando uno dei metodi numerici studiati.

Soluzione

Per verificare che l'equazione $x^3 - 3x + 1 = 0$ ammette tre radici reali, si può procedere in modo analogo a quanto si è fatto nel *quesito 6* cioè :

Metodo algebrico con la formula di Cardano

Affinché un equazione del tipo $x^3 + px + q = 0$ ammetta tre soluzioni reali e distinte il suo *discriminante* deve essere negativo, cioè $\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0$.

Per l'equazione $x^3 - 3x + 1 = 0$ si ha:

$$\Delta = \frac{(1)^2}{4} + \frac{(-3)^3}{27} = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4} < 0$$

e quindi l'equazione assegnata ammette tre radici reali.

Metodo Grafico

Affinché l'equazione $x^3 - 3x + 1 = 0$ abbia tre radici reali, la funzione $f(x) = x^3 - 3x + 1$, deve avere tre intersezioni con l'asse delle ascisse, ciò accade se la funzione (cubica) ha un massimo e un minimo relativo e se tali punti di estremo sono di segno discorde.

La funzione è continua e derivabile su tutto l'asse reale, la sua derivata prima è $f'(x) = 3x^2 - 3$.

Studiamo il segno della derivata prima:

$$\begin{cases} f'(x) > 0 \Rightarrow x < -1 \quad \cup x \quad > 1 \ (\text{la funzione è strettamente crescente}) \\ f'(x) = 0 \Rightarrow \left\langle \begin{array}{l} x = -1 (\text{la funzione presenta un punto di massimo relativo proprio}) \\ x = +1 (\text{la funzione presenta un punto di minimo relativo proprio}) \end{array} \right. \\ f'(x) < 0 \Rightarrow -1 < x < 1 \ (\text{la funzione è strettamente decrescente}) \end{cases}$$

La funzione ha le ordinate dei punti di estremo relativo di segno opposto infatti presenta un punto di massimo in M(-1;3) e un punto di minimo relativo in N(1;-1). In virtù del teorema di esistenza degli zeri, si può affermare che ammette almeno uno zero interno all'intervallo [-1;1].

Siccome $f(0)=1>0$ e $f(1)=-1<0$ esisterà almeno uno zero internamente all'intervallo [0;1].

Usiamo il *Metodo di bisezione* per determinare iterativamente il valore approssimato dello zero dell'equazione $x^3 - 3x + 1 = 0$ internamente all'intervallo [0;1].

//